VARIA OPERA MATHEMATICA D. PETRI DE FERMAT, SENATORIS TOLOSANI.

Acceſſerunt ſelectæ quædam ejuſdem Epiſtolæ, vel ad ipſum a pleriſque doctiſsimis viris Gallicè, Latine, vel Italice, de rebus ad Mathematicas diſciplinas, aut Phyſicam pertinentibus ſcriptæ.

TOLOSÆ,

Apud JOANNEM PECH, Comitiorum Fuxenſium Typographum, juxta Collegium PP. Societatis JESU.

M. DC. LXXIX.

Novo invento usi iterum expresserunt R. Friedlænder & Filius. BEROLINI MDCCCLXI.

CELSISSIMO

S. R. I. PRINCIPI

FERDINANDO

EPISCOPO PADERBORNENSI,

COADIVTORI MONASTERIENSI.

COMITI PYRMONTANO,

LIB. BARONI DE FURSTENBERG.

SAMVEL DE FERMAT S. P.

SI munus quod tibi, Celſiſſime Princeps, offero non reſpuas, grati ſimul animi & obſequii quodam erga te, ac pietatis officio erga Parentem fungi videbor; dum in illius operum Mathematicorum limine nomen ſtatuo, quod injurias temporum & invidia morſus arcere poſſit. Quis enim unquam credat improbari quod tu ſemel probaveris, quem Arctoi ſyderis inſtar intuentur quicumque ſcientiarum pelagus ſulcare cupiunt, mox tutius & tranquillius futurum, cùm fluctus omnino ſedaverit lenior pacis aura quæ tandem ſpirare cœpit? Sic autem per omnes orbis literarii partes lucem ſpargis, ut te cuncti ſuſpiciant & neminem deſpicias; ita multorum errorem Magnatum damnas qui veluti quodam ſummæ dignitatis privilegio ſibi conceſſum exiſtimant, ut non tantùm impunè, verùm etiam ſplendidè poſſint eſſe indocti; & ſe contemnendos putent niſi Muſas ſpernere audeant. Sed abundè tua probat authoritas nulli magis utiles eſſe literas, quàm ei qui, ut decet, Paſtor populorum eſſe velit, nulli plus gloriæ afferre: quia rarò conveniunt imperii comes ſollicitudo, & aptus colendæ menti ſeceſſus. Idem profectò centrum ferè nunquam habent civilium curarum & ſublimium diſciplinarum circuli: in tanto negotiorum cir-

ã ɩ

cuitu rectà ad doctrinæ culmen ascendere non minùs forsan difficile Politico videatur, quàm Geometræ curvas rectis æquare, cujus rei specimen exhibet hic edita dissertatio. Superavit tamen omnes obices tua Celsitudo, tibique fidum in mediis tempestatibus portum condere potuisti, & egregiis plerisque scriptoribus quos tuarum fama virtutum ad Paderæ fontes allicit, ubi venam quovis latice puriorem nanciscuntur, ubi te præeunte citiùs discunt quò properandum sit, quàm si studiis in umbra educatis anxiè semotos calles investigarent. Longum scilicet iter est per præcepta, breve per exempla, brevissimum per exempla Principis viri, quem etiam avia peragrantem loca plurimi libenter sequi conantur; sed paucissimi sunt qui tuis inhærere vestigiis queant; & dum optas.

Voce ciere viros, Phœbumque accendere cantu,

*Vocis tuæ suavitas tuis non mediocriter votis obstat. Deterret nimirum qui sic hortatur; silere docet, qui tam doctè loquitur. Id ego experior quoties opera tua pervolvo, quæ mihi licet ignoto & immerenti mittere voluisti: illa semper, adulationis expers, cujus causas procul habeo, mirari simul & laudare gaudeo quæ vix quisquam imitari posse confidat. Monumentis enim Paderbornensibus, quæ tam munificè restaurans tam eleganter celebras, monumentum longè perennius exegisti: si Quinctilii Vari, cujus cladem cedro dignis carminibus memoras, Legiones Romæ reddi nequeunt, at saltem tui sermonis illecebris & venustate Vari vel Augusti sæculum ei reddere videris, Virgiliumque simul & Horatium ac utriusque præsidium & decus referre. Augurabatur olim lepidus Vates non defuturos Marones, quandiu sint Mæcenates, sed quidquid præclarum in Mæcenate & Marone fuit, in eodem pectore reperiri posse nemo speraverat, sive quòd nimia copia Poëtas inopes & steriles plerunque reddit (unde Theocritus * Diophanto fatetur artes excitari paupertate, quam laboris magistram vocat) sive quòd alienis carminibus ei non opus est qui suis satis oblectari potest, ut adoptivos liberos quærere non solet cui natura legitimam sobolem dedit. Verùm in te, Celsissime Princeps, collecta non sine stupore cernimus, quæ divisa tam illustres alios effecerunt; & tua singularis humanitas, quæ tot eximias dotes connectens, cælestes gemmas auro inserere videtur, spondet à te benignè excipiendum, tuoque in sinu fovendum hunc ingenii paterni partum, qui suo defensore orbatus, ut posthumus, tuo patrocinio indiget, quod venerabundus exposco.*

[* Idyl. 16.]

ERUDITO LECTORI.

NON te latet, Erudite Lector, opera Mathematica præfatione vix indigere: nam ut Paralogismi culpam frustrà longo sermone Geometra deprecari vellet, aut pro vera demonstratione falsam obtrudere; ita non opus est assensum solidæ rationis viribus debitum suppliciter efflagitare, quem adversarius videns sciensque, licet valdè reluctans, denegare non possit. Præterea supervacaneum foret laudes Mathematum fusè celebrare, cùm hanc spartam tot egregij scriptores adornandam jampridem susceperint. Quis enim nescit Geometriam & uberes illius fructus ad cœlum evehi à Platone, qui non solùm eam divinitùs humanæ menti insitam, sed etiam ab ipso numine excoli putavit? nonne meritò Mathesis à Philone vocata fuit liberalium artium metropolis, quas, ubi desit illa, luminibus, & veluti manibus orbatas esse liquet? Unde à vero non aberrat qui ut manum instrumentum ante instrumenta, sic & Mathesin dici posse credit artem ante alias artes, cum illius terrâ marique, & bello ut pace, tam evidens utilitas sit; quod unus instar omnium docuit olim Archimedes, dum infirmus corpore sed invictus ingenio senex, obsidionis Syracusanæ pars maxima, patriæ vis summa fuit, Briareus & Centimanus à Romanis appellatus: Quamobrem admiratione perculsum Marcellum licet hostem ab eo tot damnis affectum ei tamen inimicum esse noluisse Livius tradit, sed propinquis inquisitis honori præsidioque nomen, ac memoriam tanti viri fuisse. Mathematicas deinde disciplinas ansas Philosophiæ videri quis diffiteatur? cum Philosophus quamvis abundè Logicæ versutijs & argutijs instructus, si lux mathematica non affulgeat in Physica comparari possit Polyphemo in spelunca occæcato, & muneris, quo frui potuit, usum nescienti, vini scilicet, cui præclarus non ita pridem Philosophus Geometriam similem dici posse arbitratus est, quod recens inflat, vetus oblectat & vires auget. At non istorum operum Authorem inflavit unquam Mathesis, & tot demonstrationes, dum ab ipso non sunt editæ, quibuslibet argumentis meliùs demonstrant eum ab ostentatione laudisque cupidine alienum fuisse. Quòd autem de illarum sorte sollicitus non fuit, ferè semper autographa nullo servato responsorum exemplari mittere solitus, parum abfuit quin hæc, quæ fortè non interitura credes, omninò extincta fuerint, antequam in publicam lucem prodirent. Hinc fit ut quia hæc sparsim disjecta colligere facile non fuit, fato posthumorum operum serò, pauciora, & minus culta typis edantur. Hinc etiam contingere poterit ut omnia quæ hîc occurrent tibi non videantur nova: sed quamvis alij de quibusdam rebus, quas hîc invenies, scripserint & lucubrationes suas priùs vulgaverint, non ideò minùs hæc inventa istorum operum Authori debentur, qui adeò fastûs, & invidiæ expers fuit, ut aliena suis sat aliunde notis immiscuisse credi non possit, qui sua vix sibi tribuebat. Ab eo, exempli causâ, libri duo Apollonij Pergæi de locis planis procul dubio restituti sunt, licet Franciscus Schooten Academiæ Lugduno Batavæ Professor illos à se restitutos asserat; nam sua typis mandavit Franciscus Schooten anno 1657. sed libros duos, qui hîc extant, Apollonij Pergæi de locis planis se vidisse Lutetiæ manuscriptos, nec non ad locos planos & solidos Isagogen,

testis omni exceptione major Herigonius asserit tomo 6. cursûs Mathematici editi anno 1634. Credere tamen, vt dixi, malim Batavum Professorem eâdem de re scripsisse, quàm ab eo, vel à quovis alio aliquid perpetratum esse suspicari quod ingenuum animum dedeceat, vel inverecundiam plagij probare possit. Verum in istis, ni fallor, operibus, de quibus te non ex parva mole judicaturum sat scio, occurret tibi non injucunda varietas, ut & in epistolis, quæ vel ab Authore, vel ad ipsum à plerisque doctissimis viris scriptæ fuerunt. Has inter sunt nonnullæ Pascalij in quibus ingenij non minùs tersi quàm perspicacis radios agnosces, quos ejusdem aliæ lucubrationes, & ipsæ satis exhibent Pascalij cogitationum reliquiæ: illud enim opus in quo *pendent opera interrupta*, multis eximium Matheseos circa res sacras specimen videtur, *æquataque machina cælo.* Quis autem ignorat qualis quantusque Geometra & quam insignis in Academia Parisiensi Professor fuerit Robervallius, cujus hîc aliquot epistolas legere poteris, & perlegisse gaudebis? Eduntur hîc quoque nonnullæ Galliçè vel Italiçè scriptæ à Kenelmo Digbæo, qui præter generis nobilitatem & honores gestos, non solùm ingenio doctrinâque, sed etiam pietate conspicuus fuit, ac veræ Religionis cultu, quam ut gladio, sic & calamo tueri conatus est, ut fidem facit aureus illius liber de veritate Catholicæ Religionis Angliçè scriptus. Illis epistolis additur una aut altera Frenicli, cujus miram Arithmetica problemata solvendi facilitatem à multis prædicatam, & ejusdem responsis confirmatam Analystæ norunt. Quas verò non adjecimus circà Cartesianam Dioptricam epistolas legere poteris in tertio volumine epistolarum Cartesij cujus stupendæ sagacitatis circà Geometriam admiratione se captum fatetur is etiam qui nonnunquam ab eo dissentit. Ut autem in varijs istis operibus, sic & in epistolis multa reperies quæ ad Geometriam, vel Analyticen pertinent aut numerorum arcana, de quibus si plura videre cupias, habes observationes ad Diophantum, cujus opera typis mandari curavi anno 1670. & Doctrinæ Analyticæ inventum novum collectum è variis epistolis D. Petri de Fermat ab insigni Geometra R. P. Jacobo de Billy S. J. Sacerdote. Est hîc præterea nonnihil circa Mechanicam & Geostaticam, nec non Dioptricam ac Physicam, circà quàm v. g. non contemnendam fore confido epistolam de proportione quâ gravia decidentia accelerantur, ad Gassendum, quæ ipsi Gassendo viro exquisitæ eruditionis, & candore ac moribus qui Christianum Philosophum decent, prædito non displicuit, ut ejus responso, licet brevi, satis patet. Sic etiam celebris Itali Geometræ Abbatis Bened. Castelli epistola probat ei non displicuisse quæ hîc scripta sunt circà motum gravium aut centrum gravitatis. Cæterùm in his Parentis mei operibus & epistolis quæ multas disputationes circà quæstiones arduas continent, & quibus duas addidimus criticis observationibus non spernendis refertas, nullam vocem quæ sit acerbior, nullum pervicacis controversiæ vel amarulentæ contentionis occurrere vestigium, poteris observare. Id innatam mansuetudinem Authoris arguit, qui nullâ contradicendi libidine veritatem quærens, illam ab alijs inveniri gaudebat & gratulabatur: qui secùs agunt eam ut juvenes proci colere videntur, dum sibi dumtaxat affulgere vellent quod diligunt; sed qui veritatem divino, ut par est, amore prosequuntur, ipsam omnibus innotescere cupiunt, suamque felicitatem augeri putant, cum ejusdem plurimi fiunt participes. Epistolas verò ad Authorem scriptas, quæ hîc extant, ut nactus sum, edendas ingenuè existimavi, nullomodò minuere sed augere cupiens tantorum virorum famam, quorum alia responsa, nondum prælo commissa, si mihi suppeterent, ut harum disputationum seriem edere non pigeret. Ex istis autem operibus, Erudite Lector, fructûs, ni fallor, & voluptatis non parùm percipere poteris & si quid incuriâ Typographorum erratum sit, illud suppleas aut ignoscas quæso.

Schemata suis locis in toto opere, ut in illius parte, reperirentur, nisi defuisset sculptor ligni notis Geometricis incidendi peritus; sed figuræ quæ cum textu editæ non fuerunt, ad libri calcem sunt rejectæ, numeris paginarum, ad quas referuntur, appositis, quod semel monuisse sufficiat.

DE CELSISSIMO PRINCIPE

FERDINANDO FURSTENBERGIO,

Epiſcopo Paderbomenſi, &c.

OB AVREUM NVMISMA, IN QVO illius imago conſpicitur, miſſum.

AUREA Pierio quam culmine mittis imago
Quæ noſtros ingreſſa lares fulgore replevit
Immeritamque manum, Phœbi ipſa referre videtur
Ora, ſolo qui cuncta fovet, nec florea tantum
Rura ſuper lætus rutilat glebaſque feraces,
Cernere ſed ſterilem non dedignatur arenam;
Sic hilares oculos ſimul & cum fronte ſerena
Innocuos mores inſignis vultus adumbrat;
Sit tamen ars quamvis ſpectanda numiſmatis, illam
Effigiem ſuperavit opus quodcunque Camænis
Sponte tuis fluxit dulci de fonte leporum:
Scilicet Aonij meliùs te vertice montis
Spirantem oſtendunt Muſæ, dum natus Olympo
Doctrinam pietate auges, caſtaſque ſorores
Ad ſuperos tollens, dignoſcis quam ſit inane
Ornati ingenium, nimioque caleſcere motu,
Si vacuum æthergo pectus non uritur igne.
Luminibus quantis & quot virtutibus omnes
SUAVITER * alliciens animos, validique catenis — * Illuſtriſſimi Principis teſſera SUAVITER & FORTITER.
Eloquij blandus victor trahis! his ego ſenſi
Me placidè captum jampridem, nec tibi poſſim
Hoc magis addici, qui me devincit, honore.
At quas nunc grates referam? Te principe Vatum
Munera digna mihi Romanaque carmina deſunt;
Carmina Mæcenas ſed tu par ipſe Maroni
Noſtra nec expectas, nec vilia munera quæris.
Non eget exiguâ ſublimis arundine laurus,
Et raucæ non vocis eget tua fama ſuſutro;
Sat nitidis Latio quibus aurea redditur ætas
Eximias ſcriptis potuiſti pandere dotes,
Purior illimi ceu ſplendens flumine ſolus,
Ut decet, ipſe ſuis radijs ſe pingit Apollo.

DE PRINCIPIS EIUSDEM PRÆCLARO Monumentorum Paderbornensium opere.

DUM Paderæ fontes æterno carmine Princeps
Aonij celebrat spes columenque chori,
Ut superat quæ sic ponit monumenta, suisque
Altius ipse aliud tollit ad astra modis!
Hujus Cana fides ornat pia pectora, mentem
Lux Sophiæ, Latij priscus & ora lepor.
Amissas * his olim Aquilas quæ flevit in arvis,
Delicias illinc Roma decusque trahit.
Fernandi eloquium Tiberis miratur, & ævi
Immemor, Augusti sæcla redite putat.

* Natus est Illustris. Princeps in ea Germaniæ parte in qua cæsæ fuerunt Quinctilii Vari Legiones.

DE EODEM PRINCIPE QUI MIRANDIS ingenii doctrinæque dotibus stemmatis ac dignitatum splendorem augens, pacem omnibus morum & facundiæ suavitate persuadere possit.

ODE.

NUnc corda mulcens ô utinam Sacer
Notos recursans per fluvios Olor
Mox cogat infensos canorâ
Voce potens lituos silere;
Hic prima Pindi gloria cui favet
Phœbus, nitentem Lilia quem tegunt,
Quas ore non compescat iras
Pieriâ modulatus arte?
Ut cum querelis dulcisonis nemus
Vox blanda latè lusciniæ replet,
Discordis oblitæ susurri
Mille solent volucres tacere;
Non ille frustra sit patriæ datus
A quo feroces flecti animi queunt;
Martis nec incassum per arua
Threicius cecinit Sacerdos:
Orpheus parentem Calliopen colens
Lenire plectro quot didicit feras!
Sermone sic præstat domare
Pectora, quam superare ferro.

ELOGE DE MONSIEUR DE FERMAT, Conseiller au Parlement de Tolose.

Du Journal des Sçavans, du Lundy 9. Fevrier 1665.

ON a appris icy avec beaucoup de douleur la mort de M. de Fermat Conseiller au Parlement de Tolose. C'estoit un des plus beaux esprits de ce siecle, & un genie si universel & d'une estenduë si vaste, que si tous les sçavans n'avoient rendu témoignage de son merite extraordinaire, on auroit de la peine à croire toutes les choses qu'on en doit dire, pour ne rien retrancher de ses loüanges.

Il avoit toûjours entretenu une correspondance tres-particuliere avec Messieurs Descartes, Toricelli, Pascal, Frenicle, Roberval, Hugens, &c. & avec la pluspart des grands Geometres d'Angleterre & d'Italie. Mais il avoit lié une amitié si étroite avec M. de Carcavi, pendant qu'ils estoient confreres dans le Parlement de Tolose, que comme il a esté le confident de ses estudes, il est encore aujourd'huy le depositaire de tous ses beaux écrits.

Mais parce que ce Journal est principalement pour faire connoître par leurs ouvrages les personnes qui se sont renduës celebres dans la republique des lettres; on se contentera de donner icy le catalogue des écrits de ce grand homme; laissant aux autres le soin de luy faire un éloge plus ample & plus pompeux.

Il excelloit dans toutes les parties de la Mathematique; mais principalement dans la sçience des nombres & dans la belle Geometrie. On a de luy une methode pour la quadrature des paraboles de tous les degrez.

Une autre *de maximis & minimis*, qui sert non seulement à la determination des problemes plans & solides; mais encore à l'invention des touchantes & des lignes courbes, des centres de gravité des solides, & aux questions numeriques.

Une introduction aux lieux, plans & solides; qui est un traité analytique concernant la solution des problemes plans & solides; qui avoit esté veu devant que M. Descartes eut rien publié sur ce sujet.

Un traité *de contactibus sphericis*, où il a demonstré dans les solides ce que M. Viet Maître des Requestes, n'avoit demonstré que dans les plans,

Un autre traité dans lequel il rétablit & demonstre les deux livres d'Apollonius Pergæus, des lieux plans.

Et une methode generale pour la dimension des lignes courbes, &c.

De plus, comme il avoit une connoissance tres-parfaite de l'antiquité, & qu'il estoit consulté de toutes parts sur les difficultez qui se presentoient; il a éclaircy une infinité de lieux obscurs qui se rencontrent dans les anciens. On a imprimé depuis peu quelques-unes de ses observations sur Athenée; & celuy qui a traduit le Benedetto Castelli de la mesure des eaux courantes, en a inseré dans son ouvrage une tres-belle sur une Epître de Synesius, qui estoit si difficile, que le Pere Petau qui a commenté cét autheur, a advoüé qu'il ne l'avoit peu entendre. Il a encore fait beaucoup d'observations sur le Theon de Smyrne & sur d'autres Autheurs anciens. Mais la pluspart ne se trouveront qu'éparses dans ses Epitres; parce qu'il n'écrivoit gueres sur ces sortes de sujets, que pour satisfaire à la curiosité de ses amis.

Tous ces ouvrages de Mathematique, & toutes ces recherches curieuses de l'antiquité, n'empéchoient pas que M. de Fermat ne fit sa charge avec beaucoup d'assiduité, & avec tant de suffisance, qu'il a passé pour un des plus grands Jurisconsultes de son temps.

Mais ce qui est de plus surprenant, c'est qu'avec toute la force d'esprit qui estoit ne-

ceſſaire pour ſoûtenir les rares qualitez dont nous venons de parler, il avoit encore une ſi grande delicateſſe d'eſprit, qu'il faiſoit des vers Latins, François & Eſpagnols avec la méme elegance, que s'il eût vécu du temps d'Auguſte, & qu'il eût paſſé la plus grande partie de ſa vie à la Cour de France & à celle de Madrid.

On parlera plus particulierement des ouvrages de ce grand homme, lors qu'on aura recouvert ce qui en a eſté publié, & qu'on aura obtenu de M. ſon fils la liberté de publier ce qui ne l'a pas encore eſté.

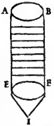
OBSERVATION DE MONSIEUR de Fermat ſur Syneſius, rapportée à la fin de la traduction du livre de la meſure des eaux courantes, de Benedetto Caſtelli.

LES pages qui reſtent vuides dans ce cayer m'ont donné la penſée de les remplir de la belle obſervation que j'ay appriſe ces jours paſſez, de l'incomparable Monſieur de Fermat, qui me fait l'honneur de m'aimer, & de me ſouffrir ſouvent dans ſa converſation. C'eſt ſur la quinziéme Lettre de Syneſius Evéque de Cyrene, qui traite d'une matiere qui n'a eſté entenduë par aucun des interpretes, non pas mémes par le ſçavant Pere Petau, ainſi qu'il l'advouë luy-méme dans les Notes qu'il a faites ſur cét Autheur; Et je donne d'autant plus volontiers cette obſervation, qu'elle a beaucoup de rapport avec les traitez qui ſont cy-devant.

Cét Evéque écrit à la ſçavante Hypatia, qui eſtoit la merveille de ſon ſiecle, & laquelle enſeignoit publiquement la Philoſophie, avec l'admiration de tous les ſçavans, dans la celebre Ville d'Alexandrie. J'ay traduit cette Lettre du Grec en cette maniere. Je me trouve ſi mal, que j'ay beſoin d'un hydroſcope. Je vous prie d'en faire faire un de cuivre, & de me l'acheter. C'eſt un tuyau en forme de Cylindre, qui a la figure & la grandeur d'une fleute; ſur ſa longueur il porte une ligne droite, qui eſt coupée en travers par de petites lignes, par leſquelles nous jugeons du poids des eaux. L'un des bouts eſt couvert d'un cone, qui eſt poſé également deſſus, en telle ſorte que le tuyau & le cone ont une méme baſe. L'on appelle cét Inſtrument Baryllion. Si on le met dans l'eau par la pointe il y demeurera debout, & l'on peut aiſement compter les ſections qui coupent la ligne droite, & par là l'on connoît le poids de l'eau.

Comme nous avons perdu la figure & l'uſage de cét inſtrument, de méme qu'une infinité d'autres belles choſes, que les Anciens avoient inventées, & dont ils ſe ſervoient, les ſçavans de ce temps icy ſe ſont donnez beaucoup de peine pour comprendre quel eſtoit cét inſtrument dont parle Syneſius. Il y en a qui ont crû que c'eſtoit une Clepſydre, mais le Pere Petau a rejetté avec raiſon cette opinion. Pour luy, il advouë, qu'il ne le comprend pas, il ſoupçonne pourtant que c'eſtoit un inſtrument qui ſervoit à niveler les eaux, & qui avoit du rapport avec celuy dont Vitruve fait mention au livre 8. ch. 6. de ſon Architecture, qu'il appelle Chorobates, mais il eſt aiſé de juger par la lecture de Vitruve, & de Syneſius, que ce ſont deux inſtrumens fort differens, & en figure, & en uſage, & que ſi tous deux ont des ſections, comme remarque le Pere Petau, celles du Chorobates ſont perpendiculaires ſur l'horizon, & celles de l'hydroſcope luy ſont paralleles. Je paſſe ſous ſilence pluſieurs autres differences, que je pourrois remarquer, pour rapporter le ſentiment de Monſieur de Fermat, qui eſt ſans doute le veritable ſens de Syneſius. Cét inſtrument ſervoit pour examiner le poids des differentes eaux pour l'uſage des malades; car les Medecins ſont d'accord que les plus legeres ſont les meilleures: le terme *ῥοπή*, dont ſe ſert Syneſius le monſtre clairement. Il ne ſignifie pas icy *libramentum* le nivelement, comme a crû le Pere Petau, mais en matiere de Ma-

chines, il signifie le poids, que les Latins appellent *momentum*, & de la le traité des equiponderans d'Archimede a pour titre 'Ισοῤῥοπικῶν. Mais dautant que la balance, ny aucun autre instrument artificiel, ne pouvoit pas donner exactement la difference du poids des eaux, à cause qu'elle est petite entre elles, les Mathematiciens inventerent sur les principes du traité d'Archimede *de his quæ vehuntur in aqua*, celuy dont parle Synesius, qui monstre par la nature des eaux mêmes, la difference du poids qu'elles ont entr'elles, la figure en est telle; A F est un Cylindre de cuivre, A B est le bout d'en haut, qui est toûjours ouvert, E F est le bout d'embas, qui est couvert du cone E I F, qui a la même base que le bout d'embas, A E, B F, sont deux lignes droites coupées par diverses petites lignes, tant plus il y en aura, tant plus exact sera l'instrument. Si on le met par la pointe du cone dans l'eau, & qu'on l'ajuste en telle sorte qu'il se tienne debout, il n'y enfoncera pas entierement; car le vuide qu'il a au dedans l'en empéchera; mais il y enfoncera jusques à une certaine mesure, qui sera marquée par les petites lignes; & il y enfoncera diversement, suivant que l'eau sera plus ou moins pesante; car plus l'eau sera legere, plus il y enfoncera: & moins, plus elle sera pesante, comme il nous seroit aisé de le demonstrer, s'il en estoit question icy. Voila la figure & l'usage de cét instrument, & la raison de cét usage. La lettre de Synesius s'y rapporte si exactement dans toutes ses circonstances, que feu Monsieur de Monchal, Archevéque de Tolose, ayant envoyé cette explication au Pere Petau, il advoüa que Monsieur de Fermat estoit le seul qui avoit compris quel estoit l'instrument, & il avoit écrit que dans une seconde impression il la mettroit dans ses notes. Mais parce que cela n'a pas esté fait, j'ay crû que le Lecteur sçavant & curieux ne sera pas marry que je luy en aye fait part.



LETTRE DE MONSIEUR DESCARTES
A MONSIEUR DE FERMAT,

pag. 347. tom. 3. des Lettres de Monsieur Descartes.

MONSIEUR,

Je n'ay pas eu moins de joye de recevoir la Lettre par laquelle vous me faites la faveur de me promettre vostre amitié, que si elle me venoit de la part d'une Maistresse, dont j'aurois passionnement desiré les bonnes graces. Et vos autres écrits qui ont precedé me font souvenir de la Bradamante de nos Poëtes, laquelle ne vouloit recevoir personne pour serviteur, qui ne se fut auparavant éprouvé contr'elle au combat. Ce n'est pas toutefois que je pretende me comparer à ce Roger, qui estoit seul au monde capable de luy resister; mais tel que je suis, je vous asseure que j'honnore extremement vôtre merite. Et voyant la derniere façon dont vous usez pour trouver les tangentes des lignes courbes, je n'ay autre chose à y répondre, sinon qu'elle est tres-bonne, & que si vous l'eussiez expliqué au commancement en cette façon, je n'y eusse point du tout contredit, &c.

P. Herigonius, tom. 6. Cursus Mathematici p. 68.

De Maximis & minimis.

NUnquam fallit hæc methodus, ut asserit ejus inventor, qui est doctissimus Fermat Consiliarius in Parlamento Tolosano excellens Geometra nec ulli secundus in arte Analytica: qui optimè etiam restituit omnia loca plana Apollonij Pergæi, quæ in hac urbe vidimus manuscripta in manibus plurimorum, quibus subnexa est ab eodem auctore ad locos planos & solidos Isagoge.

D. ISMAEL BULLIALDUS
Exercitatione de Porismatibus.

HAnc de porismatibus scriptiunculam datâ mihi occasione composui, cùm ante biennium vir illustrissimus ac amplissimus Dominus de Fermat in suprema Curia Tolosana Senator integerrimus & in judicijs exercendis peritissimus, rerum Mathematicarum doctissimus, propositiones quasdam subtilissimas & porismata quæ tam theorematicè quam problematicè proponi possunt, ad amicos suos huc misisset. Ex Pappi unius monumentis & collectionibus Mathematicis porismatum naturam & usum discere possumus, cùm ex Veteribus qui hanc Geometriæ partem attigerunt, præter ipsum nullus supersit. Illius tamen sententia legenti statim obuia non est; textusque corruptione, & applicationis porismatum defectu obscurior proculdubio evadit. Interea dum tanto viro sua edere libuerit, nostra, qualiacumque tandem sint, publici juris facere placuit; ut alios ad eorundem investigationem impelleremus; ipsumque Amplissimum Dominum de Fermat, ad sua edenda, utinam & ad alia sublimis intellectus sui εὑρήματα cum omnibus communicanda, excitaremus. Is enim est, quem omnes Europæ Mathematici suspiciunt; quem à subtilissimis ætatis nostræ Geometris Bonaventura Cavallerio Bononiæ, & Evangelista Toricello Florentiæ summis laudibus in cœlum ferri, ejusque inventa mirabilia prædicari auribus meis audivi, quem etiam virum tam eximiis virtutibus clarum, multâque eruditione ornatum, ac in rebus Mathematicis oculatissimum toto pectore veneror ac colo.

R. P. Marinus Mersennus Ordinis Minimorum, Reflexionum Physicomathematicarum pag. 215.

CUm autem vivos potiùs quam mortuos quærerem, unus absuit Clarissimus Fermatius, Geometrarum Coryphæus; quem tamen Burdigalam redux, ductore integerrimo, doctissimoque Senatore, Domino d'Espagnet, velut avulsum Bergeraco, triduò amplexus sum.

Samuel Sorberius in præfatione operum Gassendi.

PETRUM Fermatium tam longo intervallo Vietam, Diophantum & Pythagoreos omnes post se relinquentem.

VARIA

VARIA OPERA MATHEMATICA D. PETRI DE FERMAT SENATORIS TOLOSANI.

AD LOCOS PLANOS ET SOLIDOS ISAGOGE.

DE locis quàm plurima ſcripſiſſe veteres, haud dubium. teſtis Pappus initio libri 7. qui Appollonium de locis planis, Ariſtæum de ſolidis ſcripſiſſe aſſeverat. Sed aut fallimur, aut non proclivis ſatis ipſis fuit locorum inveſtigatio. Illud auguramur ex eo quod locos quàm plurimos non ſatis generaliter expreſſerunt, ut infra patebit.

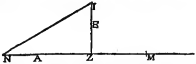
Scieutiam igitur hanc propriæ & peculiari analyſi ſubjicimus, ut deinceps generalis ad locos via pateat.

Quoties in ultima æqualitate duæ quantitates ignotæ reperiuntur, fit locus loco, & terminus alterius ex illis deſcribit lineam rectam, aut curvam, linea recta unica & ſimplex eſt, curva infinita, circulus, parabole, hyperbole, ellipſis, &c.

Quoties quantitatis ignotæ (lineæ rectæ reponendum) terminus localis deſcribit lineam rectam, aut circularem, fit locus planus: at quando deſcribit parabolem, hyperbolem, vel ellipſim, fit locus ſolidus: ſi alias curvas, dicitur locus linearis. De hoc nihil adjungemus, quia facillimè ex planorum & ſolidorum inveſtigatione, linearis loci cognitio derivabitur, mediantibus reductionibus.

Commode autem poſſunt inſtitui æquationes, ſi duas quantitates ignotas ad datum angulum conſtituamus, quem ut plurimum rectum ſumemus, & alterius ex illis poſitione datæ terminus unus ſit datus, modò neutra quantitatum ignotarum quadratum prætergrediatur, locus erit planus aut ſolidus, ut ex dicendis clarum fiet.

Recta data positione sit N Z M. cujus punctum datum N. N Z. æquetur quantitati ignotæ A. & ad angulum datum N Z I. elevata recta Z I. sit æqualis alteri quantitati ignotæ E. D in A æquetur B. in E. Punctum I. erit ad lineam rectam positione datam.



D A ≬ B E.

Erit enim ut B ad D. ita A. ad E. Ergo ratio A ad E. data est, & datur angulus ad Z. triangulum igitur N I Z. specie, & angulus I N Z. Datur autem punctum N. & recta N Z. positione. Ergo dabitur N I. positione, & est facilis compositio.

Ad hanc æqualitatem reducentur omnes, quarum homogenea partim sunt data, partim ignotis A & E admixta, vel in datas ductis, vel simpliciter sumptis.

Z^{p} — D A ≬ B in E.

fiat D in R. æquale Z^{p}

Erit ut B. ad D. ita R — A ad E.

Fiat M N. æqualis R. dabitur punctum M. ideoque M Z. æquabitur R — A. dabitur ergo ratio M Z. ad Z I. sed angulus ad Z. datur: ergo triangulum I Z M. specie, & concludetur rectam M I. junctam dari positione: ideoque punctum I. erit ad rectam positione datam: idemque nullo negotio concludetur in qualibet æqualitate cujus homogenea quædam afficientur ab A. vel E.

Et est simplex hæc & prima locorum æqualitas, cujus beneficio invenientur loci omnes ad lineam rectam; verbi gratia 7. prop. lib. 1. Appollonii de locis planis, quæ generaliùs jam poterit enuntiari & construi.

Huic æqualitati subest pulcherrima propositio sequens, quam illius ope deteximus.

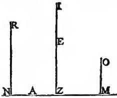
Si sint quotcumque lineæ positione datæ atque ad ipsas à quodam puncto ducantur rectæ in datis angulis, sit autem quod sub ductis & datis efficietur dato spatio æquale, punctum rectam lineam positione datam continget.

Infinitas omittimus, quæ Appollonianis meritò possent opponi.

Secundus hujusmodi æqualitatum gradus est, quando,

A in E. æq. Z. pl. A E ≬ Z^{p}

quo casu punctum I. est ad hyperbolem.



Fiat N R. parallela Z I. sumatur in N Z. quodvis punctum, ut M à quo ducatur M O. parallela Z I. & fiat rectang. N M O. æquale Z pl. per punctum O. circa asymptotos N R. N M. describatur hyperbole, dabitur positione, & transibit per punctum I. cùm ponatur rectang. A. in E. sive N Z I. æquale N M O. ad hanc æqualitatem reducentur omnes quarum homogenea partim sunt data vel ab A. vel E aut A in E. affecta.

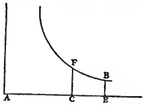
Ponatur Dp + A in E. (æq.) R in A + S in E. Igitur ex artis præceptis, Dp + AE ∞ RA + R in A + S in E − A in E. æquabitur Dp

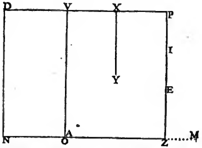
Effingatur rectang. abs duob. laterib. in quo homogenea R in A + S in E − A S E. in E. reperiantur. Uno verbo A S. æquetur O. & R − E. æquetur I. igitur O I ∞ Dp quod proponitur, & hæc erit constructio, Dp æquetur A E B. rectang. igitur A C F. erit O in I. erunt duo latera A − S & R − E. & rectang. sub ipsis æquabitur.

R in A + S in E − A in E − R in S.

Si igitur à Dp abstuleris R in S. rectangulum sub A − S, in R − E. æquabitur Dp − R in S.

Fiat N O. æqualis S. & N D. parallela Z I. fiat æqualis R. per punctum D. ducatur D P. parall. N M. O V. parall. N D. & Z I. producatur in P Cùm N O. æquetur S, & N Z, A: ergo A − S. æquabitur O Z, sive V P, similiter cùm N D. sive Z P. æquetur R, & Z I, E, ergo R − E, æquabitur P I, Rectangulum igitur sub V P, in P I. æquatur dato Dp − R in S: ergo punctum I, erit ad hyperbolem, cujus asymptoti





PV, VO. Rectangulo enim Dp − R in S, æquetur sumpto quovis puncto X, & ductâ parall. X Y, Rectang V X Y, & per punctum Y, circa asymptotos P V, V O, hyperbole describatur, per punctum I, transibit, nec est difficilis in quibuslibet casibus analysis aut constructio.

Sequens æqualitatum localium gradus est cùm A^2 vel æq. E^2 vel est in ratione data ad E^2 vel etiam A^2 + A in E, est ad E^2 in data ratione, denique hic casus omnes æquationes comprehendit intra metam quadratorum, quarum homogenea omnia vel à quadrato A, vel à quad. E, vel à rectang. A in E. afficiuntur.

A^2 ∞ E^2 A^2 ad E^2 in ratione data A^2 + AE, ad E^2 in ratione.

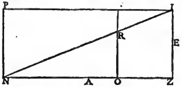
His omnibus casibus punctum I, est ad lineam rectam, cujus rei demonstratio facillima.

A 2

Sit N Z, quad. + N Z, in Z I, ad Z I, quad. in ratione data, ducatur quævis parallela O R, quadratum N O + N O in O R erit ad O R quadratum, in eadem ratione, ut est facillimum demonstrare. Punctum igitur I, erit ad rectam positione. Sumatur enim quodvis punctum, ut O, & fiat data ratio quadrati N O + N O, in O R, ad O R, quadratum. Juncta N R. dabitur positione, & satisfaciet proposito; idemque continget in quibuslibet æquationibus, quarum omnia homogenea à potestatibus ignotarum, vel rectangulo sub ipsis afficientur, ut inutile sit singulos casus scrupulosiùs perquirere.

Si potestatibus ignotarum, vel rectangulis sub ipsis, admisceantur homogenea, partim omnino data, partim sub data recta in alteram ignotarum, difficilior evadit constructio, singulos casus construimus breviter & demonstramus.

$A^2 \infty DE$. Si A^2 æq. D in E, punctum I, erit ad Parabolem.



constituantur N Z, & Z I, ad quemcumque angulum Z.

Fiat N P, Parallela Z I, & circa diametrum N P describatur parabole, cujus rectum latus recta D, datæ, & applicatæ sint parallelæ N Z. punctum I. erit ad parabolem hanc positione datam. Ex constructione rectangulum sub D, in N P, æquabitur quadrato P I, hoc est, si P I, intelligatur esse A, & N P, intelligatur esse E, D, in E, æquabitur A^2.

Ad hanc æquationem facillimè reducentur omnes in quibus A^2 miscetur homogeneis sub datis in E, aut E^2 homogeneis sub datis in A, idemque continget, licèt homogenea omnino data æquationibus misceantur.

Sit E^2 æquale D in A.

$E^2 \infty DA$. In præcedenti figura vertice N, circa diametrum N Z, describatur parabole, cujus rectum latus sit D, & applicatæ rectæ N P, parallela, præstabit propositum, ut patet.

$B^2 - A^2 \infty DE$ $B^2 - DE \infty A^2$. Ponatur $B^2 - A^2$ æqu. D in E. Ergo $B^2 -$ D in E æquabitur A^2.



Applicetur B^2 ad D, & fit æquale D. in R.

Ergo D in R − D in E, æquabitur A^2 Ideoque D in R − E æquabitur A^2.

Ideoque hæc æquatio reducetur ad præcedentem. Recta quippe R − E, succedet ipsi E.

Fiat quippe N M, parallela Z I, & æqualis R, & per punctum M ducatur M O, parallela N Z, datur punctum M, & recta M O, positione, in hac constructione O I, æquatur R − E. ergo D. in O I, æquabitur N E quad. sive M O quad. vertice M. circa diametrum M N, descripta parabole, cujus dextrum latus D, & applicatæ ipsi

NZ, parallelæ, præstabit propositum, ut patet ex constructione.

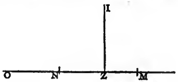
Si $B^2 + A^2$ æqu. D in E.

D in $E - B^2$ æquabitur A^2 &c. vt supr. similiter omnes æquationes affectæ construentur.

Sed A^2 miscetur sæpe E^2 & homogeneis omnino datis.

$B^2 - A^2$ æquetur E^2. $B^2 - A^2$

Punctum I est ad circulum positione datum, quando angulus NZI est rectus. ∞E^2.



Fiat N M, æqualis B, circulus centro N. intervallo N M, descriptus præstabit propositum, hoc est quodcumque punctum sumpseris in ipsius circumferentia ut I, quadratum Z I, æquabitur quadr. N M, sive B^2 quad. N Z, sive A^2 ut patet.

Ad hanc æquationem reducentur omnes affectæ ab A^2 & E^2, & ab A, vel E, in datas ductis, modo angulus N Z I, sit rectus, & præterea coefficientes A^2 æquentur coefficientibus E^2.

Sit $B^2 - {}^2D$ in $A - A^2$, æquale $E^2 + {}^2R$ in E. Addatur utrimque R^2, ut E, $B^2 - {}^2DA$ + R, succedat E, fiet $R^2 + B^2 - {}^2D$ in $A - A^2$ æqu. $E^2 + R^2 + {}^2R$, in E. $- A^2 \infty E^2$ ipsis R^2 & B^2, addatur D^2, ut D + A succedat ipsi A, & summa quadratorum $+ {}^2RE$. R^2, B^2: & D^2 æquetur P^2.

Ergo auferendo scilicet D^2, quod utrimque fuerat additum, $P^2 - D^2 - {}^2D$ in A $- A^2$.

Æquabitur $R^2 + B^2 - {}^2D$ in $A - A^2$.

Nam ex constructione $P^2 - D^2$ æquatur $R^2 + B^2$, si igitur loco ipsius A + D, sumpseris A, & loco $E \mp R$ sumpseris E.

Fiet $P^2 - A^2$: æq. E^2.

Et reducetur æquatio ad præcedentem.

Simili ratiocinatione similes æquationes reducentur & hac viâ omnes propositiones secundi libri Appollonii de locis planis construximus, & sex priores in quibuslibet punctis habere locum demonstravimus; quod sanè mirabile est, & ab Appollonio fortasse ignorabatur.

Sed $B^2 - A^2$ ad E^2, habeat rationem datam.

Punctum I. erit ad Eilipsim.

Fiat M N. æqualis B, & per verticem M. diametrum N M, centrum Z. describatur Ellipsis cujus applicatæ sint rectæ Z I, parallelæ, & quadrata. $B^2 - A^2$. ad E^2 rati.

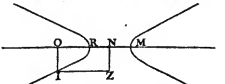
Applicatarum ad rectangulum subsegmentis diametri habeant rationem datam, punctum I, erit ad hujusmodi Ellipsim. Etenim quadratum N M − quad N Z, æquatur rectangulo sub diametri segmentis.

Ad hanc reducentur similes in quibus A^2 ex una parte opponetur E^2 sub contraria affectionis nota, & sub coefficientibus diversis. Nam si coefficientes sint eædem, & angulus sit rectus, locus erit ad circulum, ut jam diximus. Licèt igitur coefficientes sint eædem, modò angulus non sit rectus, locus erit ad Ellipsim.

Et licet commisceantur æquationibus homogenea sub datis & A vel E, fiet reductio eo quod jam usurpavimus artificio.

$A^2 + B^2$ ad E^2 ratio hyperbol.

Si $A^2 + B^2$, est ad E^2 in data ratione punctum I, est ad hyperbolem.



OI, sit A. ON, seu ZI. sit E.

Fiat N O, parallela Z I, data ratio sit eadem quæ B^2. ad quad. N R. Dabitur ergo punctum R, circa diametrum R O. per verticem R, centrum N describatur hyperbolæ cujus applicatæ sint parallelæ N Z, & rectangulum sub tota diametro & R O, ad quadratum O I. sit in data ratione N R, quadrati ad B^2. Ergo componondo rectangulum sub M O R, posita M N, æquali N R, erit ad quadratum O I, una cum B^2 in ratione data, N R, quadrati ad B^2, sed rectang. M O R, unà cum N R quad æquatur N O quadrat. sive Z I, quad. sive E^2, & quadrat. O I, una cum B^2 æquatur quadrato N Z, sive A^2 una cum B^2. Ergo est ut E^2 ad $B^2 + A^2$ ita N R, quad. ad B^2 & convertendo $B^2. + A^2$ est ad E^2, in ratione data. Punctum igitur Z, est ad hyperbolem positione datam.

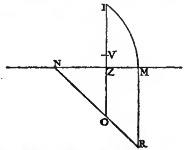
Eodem quo jam usi sumus artificio ad hanc æquationem, reducentur omnes quæ ab A^2 & E^2 afficiuntur unà cum datis, sive simpliciter, sive misceantur ipsis homogenea sub A vel E, in datas, modò A^2 habeat eamdem ex altera parte affectionis notam, quàm E^2 Nam si sint diversæ, propositio concludetur per circulos vel Ellipses.

Difficillima omnium æqualitatum est quando ita miscentur A^2 & E^2 ut nihilominus homogenea quædam ab A in E afficiantur una cum datis, &c.

$B^2 - 2A^2$ æquatur $2A$ in $E + E^2$ addatur utrimque A^2, ut $A + E$. sit latus alterius ex homogeneis, ergo.

$B^2 - 2A^2 \infty 2A\ E + E^2$.

$B^2 - A^2$. æquabitur $A^2 + 2A$ in E.



Pro $A + E$, sumatur E, si placet, & ex præcedentibus circulus M I, præstet propositum, hoc est M N, quad. (sivè B^2) − N Z, quad. (sive A^2) æquetur quadrato Z I, sive quad. abs $A + E$, fiat V I, æqualis N Z, sive A, ergo Z V, æquatur E. in

hac autem quæstione punctum V, sive extremum rectæ E, tantùm inquirimus. Videndum ergo & demonstrandum ad quam lineam sit punctum V. Fiat M R, parallella Z I, & æqualis M N, & jungatur N R, ad quam producta I Z, incidat ad punctum O. Cùm M N. æquetur M R, ergo N Z æquabitur Z O. Sed N Z, æquatur V I. Ergo toti V O, toti Z I, est æqualis: ideoque quad. M N – quad. N Z æquatur quadrato V O. Datur autem triangulum N M R. specie. Ergo quadrati N M, ad quadratum N R, datur ratio; ideoque & quadrati N Z ad quadratum N O, dabitur ratio. Ratio igitur quadrati M N – quadrato N Z, ad quadratum N R – quadrato R O datur. Probavimus autem quadratum O V, æquari quadrato M N – quad. NZ. Ergo ratio quadrati N R – N O. quad. ad quad. O V, datur. Dantur autem puncta N & R, & angulus N O Z. Ergo punctum V, ex superioribus demonstratis est ad Ellipsim.

Non absimili methodo ad superiores casus reducentur reliqui, in quibus homogenea sub A in E, homogeneis partim datis, partim sub A^2 aut E^2 immiscebuntur; aut etiam sub A & E, in datas ductis, cujus rei disquisitio facillima. Semper enim beneficio trianguli specie noti construetur quæstio.

Breviter igitur & dilucidè complexi sumus quidquid de locis planis & solidis inexplicatum veteres reliquere.

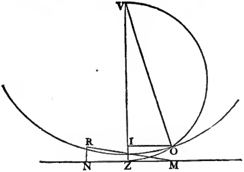
Constabitque deinceps ad quem locum pertinebunt casus omnes propos. ultimæ lib. 1. Appoll. de locis planis, & omnia omnino ad hanc materiam spectantia nullo negotio detegentur.

Sed libet coronidis loco pulcherrimam hanc propositionem adjungere, cujus facilitas statim innotescet.

Si positione datis quotcumque lineis, ab uno & eodem puncto ad singulas ducantur rectæ in datis angulis, & sint species ab omnibus ductis dato spatio æquales, punctum contingit positione datum solidum locum. Unico exemplo fit via ad praxim.

Datis duobus punctis N. M, inveniendus locus à quo si jungas rectas I N, I M, quadrata rectarum I N, I M, ad triangulum I N M, datam habeant rationem, recta N M, æquetur B, & recta Z I ad angulos rectos, dicatur E, terminus N Z, dicatur A, ergo ex artis præceptis^2 $A^2 + B^2 - {}^2B$, in $A + {}^2E^2$, ad rectangulum B in E habebit rationem datam.

Et resolvendo hypostases ex jam traditis præceptis, ita procedet constructio.



N M, bifariam fecetur in Z, à puncto Z, excitetur perpend. Z V, & fiat datæ ratio eadem quæ Z V. quadruplæ ad Z M, defcripto femicirculo V O Z, fuper V Z, applicetur Z O, æqualis ipfi Z M, & junctâ V O, centro V, intervallo V O, defcribatur circulus O ʃ R, in quo fumatur quodlibet punctum, ut R, & jungantur rectæ R N, R M: aio quadrata R N, R M, ad triangulum R N M, effe in data ratione.

Hæc inventio fi libros duos de locis planis à nobis dudum reftitutos præceffiffet, elegantiores fanè evafiffent localium theorematum conftructiones: nec tamen præcocis licèt & immaturi partûs nos adhuc poenitet, & informes ingenii foetus pofteris non invidere fcientiæ ipfius quadamtenus intereft, cujus opera primò rudia & fimplicia novis inventis & roborantur & augefcunt. Imò & ftudioforum intereft latentes ingenii progreffus, & artem fefe ipfam promoventem penitus habere perfpectam.

APPENDIX

APPENDIX

AD ISAGOGEM TOPICAM

Continens ſolutionem problematum ſolidorum per locos.

PATUIT methodus qua lineæ locales deteguntur, inquirendum reſtat qua ratione problematum ſolidorum ſolutio poſſit ex ſupradictis elegantiſſimè derivari. Hoc ut fiat, coarctanda illa quantitatum ignotarum extra limites ſuos evagandi licentia. Infinita enim ſunt puncta quibus quæſtioni propoſitæ ſatisfit in locis.

Commodiſſimè igitur per duas æqualitates locales quæſtio determinatur: ſecant quippe ſe invicem duæ lineæ locales poſitione datæ, & punctum ſectionis poſitione datum, quæſtionem ex infinito ad terminos præſcriptos adigit.

Exemplis breviter & dilucidè res explicatur proponatur $A^3 + B$ in A^2 æquari Z^{pl} in B.

Commodè utraque æqualitatis pars poteſt æquari ſolido B in A in E, ut per diviſionem iſtius ſolidi, illinc per A, hinc per B, res deducatur ad locos. Cum igitur

$A^3 + B$ in A^2 æquetur B in A in E.

Ergo $A^2 + B$ in A, æquabitur B in E.

Et erit, ut patet ex noſtra methodo, extremitas ipſius E, ad parabolem poſitione datam.

Deinde cùm Z^{pl} in B, æquetur B in A, in E, ergo Z^{pl} æquabitur A in E.

Et erit ex noſtra methodo extremitas ipſius E, ad hyperbolem poſitione datam: ſed jam probavimus eſſe ad parabolem poſitione datam, Ergo datur poſitione, & eſt facilis ab analyſi ad ſyntheſim regreſſus.

Nec diſſimilis eſt methodus in omnibus æquationibus cubicis. Conſtitutis enim ex una parte ſolidis omnibus ab A affectis, ex alterâ ſolido omnino dato, vel etiam cum ſolidis ab A vel A^2 affectis, poterit fingi æqualitas ſuperiori ſimilis.

Proponatur exempl. in æquationibus quad. quad.

$A^4 + B^3$ in $A + Z^{pl}$ in A^2 æquetur D^{pp} Ergo A^4 æquabitur $D^{pp} - B^3$ in $A - Z^2$ in A^2, æquentur hæc duo homogenea Z^2. in E^2.

Cum igitur A^4. æquetur Z^2 in E^2. Ergo per ſubdiviſionem quadraticam.

A^2 æquabitur Z in E, & erit extremitas E, ad parabolem poſitione datam.

Deinde cum D^{pp} B^3 in $A - Z^2$ in A^2 æquetur Z^2 in E^2 omnibus per Z^2 diviſis

$$\frac{D^{pp} - B^3 \text{ in } A}{Z^2} - A^2. \text{ æquabitur } E^2.$$

Et erit ex noſtra methodo extremitas E, ad circulum poſitione datum. Sed eſt

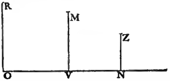
B

& ad parabolem posirione datam. Ergo datur. Non dissimili methodo solventur quæstiones omnes quadrato quadraticæ : expurgabuntur enim methodo Vietæ cap. 1. de emend. ab affectione sub cubo, & quadrato quadrato ignoto ab una parre, reliquis homogeneis ab alrera constitutis per parabolem, circulum, vel hyperbolem solvetur quæstio.

Proponatur ad exemplum inventio duarum mediarum in continua proportione.

Sint duæ rectæ, B major, D minor, inter quas duæ mediæ proport. sunt inveniendæ, fiet A^3 æqualis B^2 in D.

Si major mediarum ponatur A. Æquentur singula homogenea B in A in E. Illinc fiet A^2 æquale B in D E, istinc A in E æquale B in D. Ideoque quæstio per hyperboles & paraboles sectionem perficietur.



Exponatur enim recta quævis positione data, O V N, in qua detut punctum O, sint rectæ datæ B & D, inter quas duæ mediæ proportionales inveniendæ. Ponatur recta O V æquari A, & recta V M ipsi O V ad rectos angulos æquari E, ex priori æqualitate quâ A^2 æq. B in E, constat per punctum O, tamquam verticem describendam parabolem, cujus rectum latus sit B, diameter ipsi V M, parallela & A O, applicatæ ipsi O V, transibit igitur hæc parabole per punctum M ex 2. æqualitare, qua B in D æquatur A in E, sumatur punctum ubilibet in rectâ O V, ut N, à quo excitetur perpendicularis N Z, & fiat rectang. O V Z, æquale rectangulo B in D, excitetur etiam perpendicularis O R, circa asymptotos R O, O V de scribenda hyperbole per punctum Z, ex nostra methodo locali dabitur posirione, & transibir per punctum M, sed parabole etiam quam supra descripsimus dabitur positione & per idem punctum M, transit, datur igitur punctum M, positione, à quo si demittatur perpendicularis M V, dabitur punctum V, & recta O V, major duarum continuè proportion. quas quærimus.

Inventæ igitur sunt duæ mediæ per intersectionem paraboles & hyperboles.

Si ad quadrat. quad. lubeat quæstionem extendere omnia ducantur in A, A^4 æquab. B^2. in D in A. æquentur singula homogenea juxta superiorem methodum B^2 in E^2.

Fient duæ æqualitates, nempe A^2 & B^2 in E, & D in A & E^2.

Quæ singulæ dabunt parabolem positione datam, fiet igitur constructio mesolabii per intersectionem duarum parabolarum hoc casu.

Prior constructio & posterior sunt apud Eutocium in Archimedem, & huic methodo facillimè redduntur obnoxiæ.

Abeant igitur illæ paraplerofes Vietææ, quibus æquationes quadrato quadraticas reducit ad quadraticas per medium cubicarum abs radice planâ, pari enim elegantiâ, facilitate, & brevitate solvuntur, ut jam patuit, perinde quadraro quadraticæ ac cubicæ quæstiones, nec possunt, opinor elegantiùs.

Ut pateat elegantia hujus merhodi, En constructionem omnium ptoblematum cubicorum, & quadrato quadraticorum per parabolem & circulum.

Ponatur $A^4 + Z^3$ in A æquari D^{pp}.

Ergo A^4 æquabitur Z^3 in A + D^{pp}, fingatur quadratum abs $A^2 - B^2$ aut alio quovis quadrato, fiet quadratum $A^4 + B^4 + 2B^2$ in A^2. Addatur ad supplementum singulis æqualitatis partibus $B^4 - 2B^2$ in A^2 fiet $A^4 + B^4 - 2B^2$ in A^2 æquale $B^4 - B^2$ in A^2 æquale $B^4 - B^2$ in $A^2 - Z^3$ in $A + D^{pp}$ sit $2B^2$ — æquale N^2.

Et singulis homogeneis sive partibus æqualitatis æquetur N^2 in E^2. Fiet illinc per subdivisionem quadraticam $A^2 - B^2$. æquale N in E, ideoque punctum extremum E, erit ad parabolem, ex nostra methodo, istinc fiet $\frac{B^4}{N^2} - A^2 - \frac{Z^3 \text{ in } A}{N} + \frac{D^{pp}}{N^2}$ æquale E^2.

Ideoque ex nostra methodo punctum extremum E, erit ad circulum. Descriptione igitur paraboles & circuli solvitur quæstio.

Hæc methodus facillimè ad omnes casus tam cubicos quàm quadrato quad. extenditur. Curandum enim tantùm ut ex una parte sit A^4 ex altera quælibet homogenea, modò non afficiantur ab A^3. at per expurgationem Vietæam omnes æquationes quad. quadratæ ab affectione sub cubo liberantur, ergo eadem in omnibus methodus, cùm autem æquationes cubicæ liberentur ab affectione sub quadrato per methodum Vietæam, homogeneis omnibus in A, ductis, fiet æquatio quadrato quadrata cujus nullum ex homogeneis afficietur sub cubo, ideóque solvetur per superiorem methodum.

Id solùm in secunda æqualitate curandum est, ut A^2 ex una parte, ex altera E^2. sub contrariâ affectionis notâ reperiantur, quod est semper facillimum.

Sit enim in alio casu, ut omnia percurramus, A^4 æquale Z^{pl} in $A^2 - Z^3$ in D.

Fingatur quodvis quadratum abs A^2 — quovis quadrato dato, ut B^2, fiet $A^4 + B^4 - 2A^2$ in B^2 adjiciatur utrique æqualitatis parti ad supplementum $B^4, - 2B^2$ in B^2 fiet $A^4 + B^4 - 2A^2$ in B^2 æquale $B^4 - 2B^2$ in $A^2 + Z^p$ in $A^2 - Z^3$ in D.

Ut igitur commoda fiat divisio, in 2. A æqualitate sumenda differentia inter $2B^2$, & Z^p quæ sit V G. N^2, & utraque æqualitatis pars æquanda N^2 in E^2.

Ut illinc fiat $A^2 - B^2$ æquale N in E. Istinc $\frac{B^4}{N^2} - A^2 - \frac{Z \text{ in } D}{N^2}$ æquale E^2.

Advertendum deinde $2B^2$ debere præstare Z^p alioqui A^2 non afficeretur signo defectus, & pro circulo inveniremus hyperbolem, cui promptum remedium. B^2 enim ad libitum sumimus, ideoque ipsius duplum majus Z^p nullius est negotii sumere. Constat autem ex methodo locali circulum creari semper ex æqualitate, in cujus parte altera quadratum unum ignotum afficitur signo + in alterâ, aliud quadratum ignotum signo —.

Si sumas ad hoc exemplum inventionem duarum mediarum, erit A^3 æqu. B^2 in D. Et A^4 æq B^2 in D in A.

Adjiciatur utrimque $B^4 - 2B^2$ in A^2. $A^4 + B^4 - 2B^2$ in A^2 æquabitur $B^4 + B^2$ in D in $A - 2A^2$ in B^2 sit $2B^2$, æquale N^2.

Et singulæ æqualitatis partes æquentur N^2 in E^2.

Fiet illinc $A^2 - B^2$ æquale N in E. Ideoque extremum E, erit ad parabolem.

Fiet istinc $B^2 \frac{1}{2} + D \frac{1}{2}$ in $A - A^2$ æquale E^2.

Ideoque extremum E erit ad circulum. Qui hæc adverterit, frustra quæstionem mesolabii, trisectionis angularis, & similes tentabit deducere ex planis, hoc est per rectas & circulos expedire.

APOLLONII PERGÆI
LIBRI DUO
DE LOCIS PLANIS
RESTITUTI.

LOCI plani quid sint notum est satis superque : hac de re scripsisse libros duos Appollonium testatur Pappus, eorumque propositiones singulas initio libri septimi tradit, verbis tamen aut obscuris, aut sanè interpreti minùs perspectis. (Græcum enim codicem videre non licuit) hanc scientiam totius, ut videtur, Geometriæ pulcherrimam ab oblivione vindicamus, & Appollonium de locis planis differentem, Appolloniis Gallis, Batavis, & Illyricis audacter opponimus; certam gerentes fiduciam, non alibi præclarius, quàm hoc in opere Geometriæ miracula elucere : quod ut statim fatearis, hic exordior.

Propositiones libri primi hæ sunt.

PROPOSITIO I.

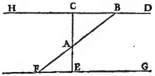
Si duæ lineæ agantur, vel ab uno dato puncto, vel à duobus, & vel in rectam lineam, vel parallelæ, vel datum continentes angulum, vel inter se datam proportionem habeotes, vel datum comprehendentes spatium : contingat autem terminus unius locum planum positione datum; & alterius terminus locum planum positione datum continget, interdùm quidem ejusdem generis, interdùm verò diversum, & interdùm similiter positum ad rectam lineam, interdùm contrario modo

Hæc propositio in propositiooes octo dividi commodè potest, & quævis ex iis in multiplices casus: obscuritatem interpreti præbuisse videtur interpunctionum defectus; imo & Pappus ipse hoc loco propter nimiam brevitatem videtur non vacavisse obscuritate. Singula dum secamus in octantes, ita revelamus.

PROPOSITIO I.

SI à dato puncto in rectam lineam duæ lineæ agantur datam habentes proportionem; & terminus unius contingat locum positione datum, hoc est, aut rectam, aut circumferentiam circuli positione datam; alterius terminus continget rectam, aut circuli circumferentiam positione datam.

Esto datum punctum, A. per quod agantur in directum rectæ. A B, A F, in proportione datâ, & sit verbi gratia punctum B, in rectâ lineâ H C B D, positione



datâ; aio punctum F, esse quoque ad rectam positione datam. à puncto A, demissâ in rectam H D, perpendiculari A C, dabitur punctum C, producatur C A, ad E, & fiat ratio C A, ad A E, æqualis datæ, dabitur igitur recta A E, & punctum E. per punctum E, parallela rectæ H D, ducatur G E F, dabitur positione, & in ea erit punctum F, quia omnes rectæ per datum punctum parallelas secantes in eamdem rationem dividuntur; patet ergò quamcunque rectam per punctum A, transeuntem, & datis positione parallelis terminatam in datam secari proportionem.

Esto deinde datum punctum B, & circulus positione I C N, cujus centrum A, jungatur B A, in puncto I, circumferentiam secans, & producatur



I B, ad B E, ut sit ratio I B, ad B E, æqualis datæ, continuetur in F, & fiat A I, ad E F, ut I B, ad B E, & centro F intervallo F E, describatur circumferentia circuli E D Z, quam patet ex constructione positione dari, aio rectas omnes per punctum datum B transeuntes, & utrimque circumferentiis datorum positione circulorum terminatas in datam secari rationem.

Ducta enim verbi gratia C B D iungantur C A, D F, est ut I B, ad B E, ita A I, ad E F, ergò ut tota B A, ad B F, ita A I, sive A C, ad E F, sive F D, & sunt æquales anguli A B C, F B D, ad verticem; patet itaque triangula esse similia atque ideò, ut C B, ad B D, ita B A, ad B F, hoc est in ratione data, cum igitur à dato puncto B ducantur in directum duæ rectæ B C, B D, verbi gratia in data ratione quarum B C, tangit circumferentiam positione datam tanget quoque B D, aliam circumferentiam positione datam.

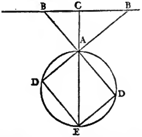
Si producantur rectæ donec ad concavas circulorum circumferentias pertingant, idem eveniet.

Monemus porrò nos minima quæque in demonstrationibus non docere, cum statim pateant, imò & casus diversos non persequi cum ex adductis minimo possint negotio derivari.

II. PROPOSITIO.

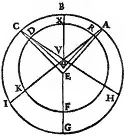
SI à dato puncto ducantur in directum duæ rectæ, datum continentes spatium contingat autem terminus unius locum planum positione, tanget pariter & terminus alterius.

Esto datum punctum A, data primum recta B C, positione in quam demittatur perpendicularis, A C, dabitur ergo & punctum C, producatur & fiat spatio dato æquale rectangulum C A E, super diametro A E, descripto circulo A D E, aio rectas omnes per punctum A ductas, & illinc rectâ, hinc circumferentiâ circuli (quem patet dari positione) terminatas ita ad punctum A, secari ut rectang.



sub partibus æquetur spatio dato, nam sit verbi gratia recta D A B, juncta D E, cum sit angulus A D E, in semicirculo rectus, & Anguli B A C, D A E, ad verticem æquales, erunt triangula D A E, A C B, similia, atque ideò rectangulum B A D, rectangulo C A E, dato æquale; cum igitur per punctum A, ducantur duæ rectæ A B, A D, in directum & terminus unius nempe A B, tangat rectam B C, positione datam, tanget & terminus alterius locum planum, hoc est circulum A D E, positione datum.

Sed detur punctum V, & circulus B I G H, positione cujus centrum E jungatur E V, & producatur in B, dabitur V B, producatur in F, ut sit rectangulum B V F,

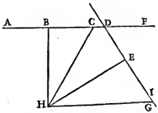


æquale dato cui etiam æquetur rectangulum G V X, super diametro X, F, circulus describatur X K F, quem quidem dari positione patet, Aio rectas per punctum V, transeuntes & duobus circulis, terminatas ita secari in V, ut rectangulum sub segmentis dato æquale efficiant. Ducatur enim verbi gratia A V, K I, Aio rectangulum A V K, æquari dato, sumatur centrum circuli minoris O, recta autem A V K I, secet eundem circulum in R, jungantur rectæ R O, A E, posuimus rectangulum G V X, æquari B V F, erit ergò G V, ad V B, ut F V, ad V X, & componendo, & sumendo antecedentium dimidia, & per conversionem rationis, ut E B, sive E A, ad E V, ita O X, sive O R, ad O V, & habent duo triangula O V R, V E A, commvnem angulum E V A, erunt ergò similia & ut A V, ad R V, ita A E, ad R O, sive E B, ad O X, V E, ad V O. cum ergò ut E B, ad O X, ita V E, ad V O, ergò ut E B, ad O X, ita reliqua V B. ad reliquam V X, atque ideò ut A V, ad R V, ita B V, ad X V, similiter probabimus ut G V, ad V F, ita I V, ad K V, erit igitur vicissim ut G V, ad V I, ita F V, ad V K, ut autem F V, ad V K, ita V I, ad V X, (quia rectangula K V R, F V X, in circulo sunt æqualia) & ut V R, ad V X, ita probavimus esse V A, ad V B, erit igitut ut F V, ad V K, ex una parte, ita V A, ad V B, rectangulum igitur K V A, rectangulo F V B, dato æquale, ex alia verò parte erit ut G V, ad I V, ita V R, ad V X, atque ideo rectangulum I V R, rectangulo G V X, dato æquales cum igitur per punctum V, ducantur duæ lineæ in directum A V, & V K, comprehendentes spatium datum, & terminus unius nempe V A, contingat circulum positione datum, tanget & terminus alterius locum planum hoc est circulum X K F, positione datum.

III. PROPOSITIO

SI à dato ducantur duæ lineæ datum continentes angulum, & datam proportionem habentes, contingat autem terminus unius locum planum positione, continget & terminus alterius.

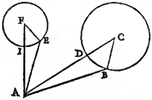
Esto primò datum punctum H, & recta linea A F, positione, in quam demissa perpendicularis H B, dabitur. Fiat angulo dato æqualis angulus B H E, & sit B H, ad



H E, in ratione data dabitur recta H E, positione & punctum E. à puncto E, ad rectam H E, excitata perpendicularis infinita D E G, dabitur positione, sumatur quodlibet punctum in recta A F, ut C, & juncta H C, fiat angulo dato æqualis C H I, aio rectam H C, ad H I, esse in ratione data, nam cum sint æquales anguli B H E, C H I, dempto communi C H E, erunt æqua les B H C, E H I, & sunt anguli ad B, & E, recti, sunt igitur similia triangula H B C, H E I, & ut H B, ad H C, ita H E, ad H I, & vicissim ut H B, ad H E, ita H C, ad H I,

habet rationem datam. Cum igitur à dato puncto H, ductæ fuerint duæ lineæ H C, H I, in dato angulo C H I, & in data ratione, & altera nempe H C, ad punctum C, contingat rectam positione continget & terminus alterius locum planum, nempe rectam D G, quam dari positione probatum est.

Sed tangatur circulus, esto punctum A, datus circulus positione I E, cujus centrum F, jungatur F A, secans circulum in I, & fiat angulus æqualis dato, & ratio I A,

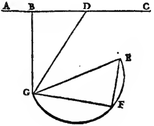


A D, data, dabitur A D, positione & punctum D, producatur, & fiat ut I A, ad A D, ita I F: ad D C, centro C, descripto circulo D B, quem patet dari positione sumatur quodvis punctum in priore circulo ut, E, & juncta E A, fiat angulo dato æqualis E A B, & sit punctum B in secundo circulo, aio esse A E ad B A in ratione datâ jungantur F E, B C, probabimus ut supra æquales angulos F A E, C A B, & similitudinem triangulorum F A E, C A B, iisdem rationibus quibus jam in priore propositione, ejusque 2. figura usi sumus, arguemus, eritque A F, ad E A, ut A C, ad A B, & vicissim ut A F, ad A C, hoc est ut A I, ad A D, ita A E, ad A B, dabitur ergo ratio A E ad A B, & patet tum sensus, tam consequentia propositionis.

IV. PROPOSITIO.

SI à dato puncto ducantur duæ lineæ datum continentes angulum & datum comprehendentes spatium contingat autem terminus unius locum planum positione datum, continget, & terminus alterius.

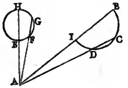
Sit datum punctum G, recta positione data A C, in quam ducatur perpendicularis G B, esto angulus datus B G E, & spatium datum sub B G, in G E, super G E,



describatur

describatur semicirculus G E F, & sumpto in recta positione data quovis puncto ut D, junctaque D, G, fiat angulo dato æqualis D G F, aio rectangulum sub D G, in G F, æquari dato, jungatur F E, probabimus ut in propositione præcedente æqualitatem angulorum B G D, E G F, sed recti ad B, & F, sunt æquales, non latebit igitur triangulorum B G D, E G F, similitudo neque rectangulorum B G, in G D, & G D, in G F, æqualitas, neque veritas positionis, si igitur, &c.

Sed sit datum punctum A, & circulus positione H G E, ducatur per ipsius centrum A E H.



Secans circumferentiam in punctis E H, sit angulus datus H A B, & spatium datum rectangulum sub H A, in A I, vel E A, sub A B, super recta I B descripto semicirculo (quem quidem patet dari positione) satisfiet quæstioni, nam ducta G F A verbi gratia & facto angulo G A D C, dato æquali; aio rectangulum G A D, vel FAC, æquari dato, nam cum rectangula H A I, E A B, æquentur, erit ut H A, ad A E, ita A B, ad A I, Ex propositionis verò superioris ratiocinio patet æqualitas angulorum H A G, B A C, & ex prima propositione facilè deducetur esse ut H A, ad G A, ita B A, ad A C, sed ut H A, ad G A, ita F A, ad A E, ergò ut F A, ad A E, ita B A, ad A C, rectangulumque F A C, rectangulo B A E, dato est æquale. Deinde est ut B A, ad A C, ita A D, ad A I, rectangulumque G A D,, rectangulo H A I, dato æquale. constat itaque ex omni parte propositum, si igitur, &c.

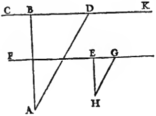
Hoc in casu sumpsimus punctum A extra circulum positione datum, in 2. verò casu 2. propositionis intra circulum perseveramus.

Quatuor propositiones præcedentes punctum unum datum assumunt, sequentes duo.

PROPOSITIO V.

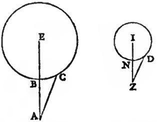
SI à duobus punctis datis duæ lineæ parallelæ agantur rationem habentes datam, contingat autem terminus unius locum planum positione datum, continget & terminus alterius.

Sunto duo puncta A & H recta positione C B D K, in quam demittatur perpendicularis A B, cui parallela ducatur H E, & sit ratio A B, ad H E, data, dabitur



punctum E, per quod ducta E F G, perpendiculari ad H E, & rectæ positione datæ parallela; aio omnes parallelas à punctis A H, ductas, & rectis C D, F G, positione datis terminatas, esse in proportione data A B, ad H E; erunt enim anguli B A D, EHG, æquales, & recti ad B, & E, similes ergo trianguli B A D, E H G, & reliqua facilia. Cum igitur à datis duobus punctis A, & H, ductæ fuerint parallelæ A D, H G, in ratione data, quarum A D, est ad datam rectam positione erit & H G, ad rectam positione datam, ideoque ad locum planum.

In hac figura sint data puncta A, & Z, & circulus positione B C, cujus centrum E, jungatur A E, occurrente circulo in B, & huic parallela ducatur Z N, fiatque ratio

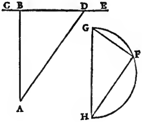


A B, ad Z N, æqualis datæ producatur Z N, in I, & fiat ratio B E, ad N I, æqualis etiam datæ, centro I, intervallo I N, descriptus circulus dabitur positione, & quæstioni satisfaciet, nam ductis parallelis A C, Z D, circulis ad puncta C, D, occurrentibus erit ratio A C, ad Z D, æqualis datæ, esse enim angulos B A C, N Z D, æquales, jam primùs hujus propositionis casus evicit, reliquum præstabit secundum propositionis epitagma.

PROPOSITIO VI.

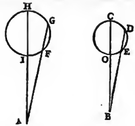
SI à duobus punctis datis duæ parallelæ agantur datum comprehendentes spatium contingat autem terminus unius locum planum positione datum continget & terminus alterius.

Sint data duo puncta A, & H, recta positione C E, in quam perpendicularis A B



cui parallela ducatur H G, & rectangulo dato sit æquale rectangulum sub A B,HG,dabitur recta H G, super qua descriptus semicirculus H F G,quæstionem perficiet, ductis enim ubicumque parallelis A D, H F, & juncta G F,parebit demonstrationes superiores retractanti triangulorum B A D, G H F, similitudo, ideoque rectangulum sub A D, in H F, æquale dato sub B A, in H G, concludetur; cum igitur à duobus punctis, &c.

In 2. casu sint data puncta A & B, & circulus positione I F G H, per cujus centrum transeat A I H, cui parallela ducatur B C, & sit rectangulum sub A I, B C, æquale

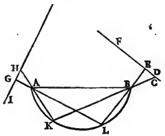


dato, eidemque æquale rectangulum sub A H, in B O, super recta O C, descriptus semicirculus præstat propositum, nam ductis parallelis A F G, B E D, erunt anguli H A G, C B D, æquales & rectangulum sub A G, in B E, æquale dato eidemque rectangulum sub A F, in B D, nec, absimilis est ei, quæ in 2. epitagmate propositionis quartæ prodita est demonstratio.

VII. PROPOSITIO.

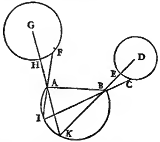
SI duæ lineæ agantur à datis duobus punctis datum continentes Angulum & datam habentes proportionem contingat autem terminus unius locum planum positione datum continget, & terminus alterius.

Sunto duo puncta A, & B, recta positione I G H, super B A, describatur portio circuli A L B, capiens angulum æqualem dato à puncto A, ducatur in rectam I H, perpendicularis A G, quâ productâ donec circumferentiæ occurrat in L, producatur L B E, & fiat A G, ad B E, in ratione data perpendicularis ad B E, agatur F E, D C, & sumatur quodlibet punctum in portionis circumferentia ut K, à quo ducantur per puncta A & B, rectæ K A H, K B D, occurrentes rectis I H, F C, in punctis H & D,



aio A H, ad B D, esse in ratione data A G, ad B E, cum enim hoc ita se habeat erunt triangula A G H, B E D, similia, ideoque anguli G A H, E B D, eisque ad verticem K A L, K B L, æquales, quod quidem ita se habet cum eidem circuli portioni insistant, & proclivis est ab analysi ad synthesim regressus. Cum igitur à datis duobus punctis A, & B, ductæ fuerint duæ rectæ A H, B D, datum continentes angulum H K D, & terminus ipsius A H, contingat rectam I H, positione datam, continget & terminus B D, rectam F C, quam dari positione evicit constructio.

Sed sint data puncta A B, circulus positione H F, super recta A B, describatur portio.

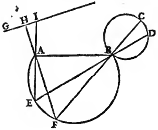


circuli A K B, capiens angulum dato æqualem, centrum circuli H F, esto G, jungatur A H G, producatur donec portioni occurrat in K, & ducatur K, B, E, & fit ratio A H, ad B E, data producatur B E, in D, donec H G ad D E, sit pariter in ratione data, centro D, descriptus circulus dabitur positione, & dabit solutionem quæstionis: ductis quippe I A F, I B C, erunt anguli ad A, & B, æquales, & reliquum propositi non est laboriosum; statimque patet A F, ad B C, esse in ratione datâ, imò & ad circumferentias concavas productas idem præstare: cum igitur, &c.

VIII. PROPOSITIO.

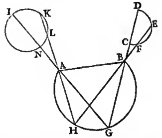
Si à duobus punctis datis ducantur duæ lineæ, datum continentes angulum, & datum comprehendentes spatium, contingat autem terminus unius locum planum positione datum, continget & terminus alterius.

Sint data duo puncta A, & B, recta positione G I, super A B, describatur portio circuli capiens angulum datum, ductæ perpendicularis A H, in G I, continuetur in F,



& juncta F B, producatur in C, sitque spatium datum A H, in B C, super recta B C, descriptus circulus faciet quod proponitur, erit quippe sumpto quovis puncto in portione, E, & junctis E A I, E B D, rectangulum sub A I, B D, æquale dato nec differt ab expositis aliis casibus demonstratis.

Sed sint data duo puncta A & B, datus positione circulus I K L, & super A B, descripta portio circuli capiens angulum dato æqualem; ducatur per centrum recta A N I, & producatur in G, junctaque G B, producatur & fiat rectangulum sub A I, in B C, æquale dato eidemque æquale rectangulum sub A N, in B D, super C D, descriptus semicirculus satisfaciet proposito.



Hoc est sumpto quolibet puncto in H, & reliquis ut supra constructis, ut in figura, erit rectangulum sub A K, in B F, æquale dato, eidemque rectangulum sub A L, in B E, nec est diversa demonstratio à precedentibus constat itaque propositum.

Eaque ratione prior Appollonii seu Pappi propositio redditur manifesta.

Observandum autem casus quos in semicirculis tantùm expressimus in circulis integris locum habere; sed & casus multiplices ex variâ datorum positione oriri, quos otiosiores ex præcedentibus facili operâ & proclivi ratiocinio deducent.

Subjicit Pappus locum planum quem 2[a]. ex rectis contingit interdum esse ejusdem generis; interdum verò diversum. Hoc patet quia in 1. propositione verbi gratiâ est ejusdem generis, nam si prior sit ad rectam est quoque ad rectam posterior, si ad circulum similiter ad circulum, in secundæ verò priore parte, & aliis quibusdam casibus est diversi generis.

Addit deinde aliquando similiter poni ad rectam lineam, interdum contrario modo: quo loco verba (ad rectam lineam) quæ nullum sensum admittunt, censeo delenda, & ita locum interpretor, ut aliquando secundus locus priori contrario modo ponatur, verbi gratiâ, si prior sit ad convexum circuli, secundus ad concavum, &c. cujus rei exempla priores propositiones suppeditabunt.

PROPOSITIO II.

SI rectæ lineæ positione datæ unus terminus datus sit, & alter circumferentiam concavam positione datam continget.

Hæc verba si ita legantur falsa est propositio, reponendum igitur loco, verbi gratiâ (positione datæ) magnitudine datæ; eritque sensus: ut datâ circuli diametro & centro, extremitas diametri sit ad circulum positione datum cujus rei veritas cum per se pateat cur diutius hic immoremur.

PROPOSITIO. III.

SI à duobus punctis datis inflectantur rectæ lineæ datum angulum continentes, commune ipsorum punctum contingct circumferentiam concavam positione datam.

Hæc propositio per se patet, dari enim super rectâ lineâ duo puncta jungente portionem circuli capientem angulum datum docuit Euclides in elementis.

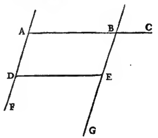
PROPOSITIO IV.

SI trianguli spatii magnitudine dati, positione & magnitudine basis data sit, vertex ipsius rectam lineam positione datam continget, parallelam nempe basi datæ, cujus inventione ex 1. elem. facilè deduces omnia.

PROPOSITIO V.

SI rectæ lineæ magnitudine datæ, & cuipiam positioni datæ æquidistantis unus terminus contingat rectam lineam positione datam, & alius terminus rectam lineam positione datam continget.

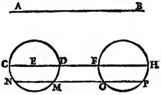
Datæ rectæ lineæ DE, magnitudine, & rectæ AC, positione datæ æquidistantis



unus terminus ut D, contingat rectam AF, positione datam si per punctum E, duxeris BEG, ipsi AF, parallelam constabit propositum. Erunt quippe rectæ omnes inter has duas parallelas interceptæ & rectæ AC, positione datæ æquidistantes, inter se æquales: quod ipsa constructio manifestat. Si igitur alter terminus cujuslibet sit ad rectam AF, erit alius ad BG, ut vult propositio, quam etiam licet porrigere levi negotio ad circulos.

Sit enim data AB, positione cui æquidister recta NO, magnitudine data, cujus punctum N, sit ad circumferentiam circuli CNM, positione dati; Aio punctum O, esse ad circulum positione datum. Esto E, centrum circuli CNM, & ducta diameter ipsi NO, parallela continuetur in F, donec recta CF, æquetur NO, datæ, dabitur recta CF. positione, & magnitudine, producatur, & fiat FH, æqualis CD, su-

per F H, descriptus circulus præstabit propositum, erit quippe punctum O, ad ipsius circumferentiam cum enim punctum O, sit ad circumferentiam circuli F O P, erunt



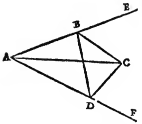
rectæ C N, F O, æquales & parallelæ, cum æquales & parallelas C F, N O, conjungant; erunt igitur anguli N C D, O F H, æquales; quod quidem ita se habet cum rectæ C D, F H, sint æquales, & à rectis N M, O P, æqualiter distent. poterit igitur propositio Pappi universaliùs ita concipi.

Si rectæ lineæ magnitudine datæ, & cuipiam positione datæ æquidistantis, unus terminus contingat locum planum positione datum, & alius terminus locum planum positione datum continget.

PROPOSITIO VI.

SI à Puncto ad positione datas duas rectas lineas parallelas vel inter se convenientes ducantur rectæ lineæ in dato angulo vel datam habentes proportionem vel quarum una simul cum ea ad quam altera proportionem habet datam, data fuerit continget punctum rectam lineam positione datam.

Hujus propositionis duæ sunt partes, quarum prior hæc est Sint duæ rectæ positione datæ A E, A F, in puncto A, concurrentes, & à puncto C, demittantur rectæ C B

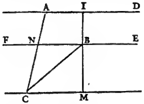


C D, in datis angulis C B A, C D A, & sint rectæ B C, C D, in data proportione Aio punctum C, esse ad rectam lineam positione datam. Jungantur A C, B D, in quadrangulo A B C D, dantur tres anguli A B C, A D C, B A D, datur igitur angulus B C D, datur etiam ratio B C, ad C D, ex hypothesi ergo datur specie triangulum B D C, & anguli C B D, C D B, reliqui igitur A B D, A D B, dantur, ideoque spe

cie triangulum A B D, datur, igitur ratio A B, ad B D, sed ex demonstratis datur ratio B D, ad B C, (cum probatum sit triangulum B D C, specie dari) ergo datur ratio A B, ad B C, datur autem B A, positione & punctum A, datur igitur positione recta A C, & in ea sumpto quovis puncto & ab eo dimissis in datis angulis rectis in rectas datas, probabitur semper demissas esse in data proportione.

Alter casus est si rectæ datæ sint parallelæ.

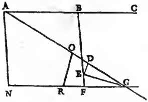
Sint rectæ C A, C B, in datis angulis C A D, C B F, in proportione datâ, angulus C N B, datur, est enim æqualis propter parallelas dato C A D, datur igitur specie



triangulum C N B, & ratio C N, ad C B, datur autem ex hypothesi ratio C B, ad C A, ergo ratio C N, ad C A, data est; ideoque probatur facile punctum C, esse in recta datâ positione. Constructio, per punctum quodvis ut B, trajiciatur perpendicularis I B M, dabitur I B, fiat ut A N, ad N C, ita I B, ad B M, per punctum M, ducta duabus datis parallela, satisfacier quæstioni, nec est operosa demonstratio; si igitur à puncto quodam ad positione datas duas rectas lineas parallelas vel inter se convenientes ducantur rectæ lineæ, datis angulis habentes datam proportionem contingent punctum rectam lineam positione datam.

Secunda pars ita se habet.

Denturrectæ A C, A G, in puncto A concurrentes, ponatur A N, super rectam A C, in dato angulo C A N, fiat A N, æqualis datæ & ipsi A C, parallela ducatur N G,



angulus alius datus sit R O G, per primam partem hujus ducatur recta G E, in qua sumpto quovis puncto ut E, rectæ E D, E F, ipsis R O, A N, parallelæ, sint in ratione datâ, dabitur G E, positione ex superius demonstratis. Producatur F E, in B, dabitur F B, magnitudine est enim æqualis datæ A N, propter parallelas. Quodcumque igitur punctum sumpseris in recta G E, ut E, à quo in rectas A C, A G, demiseris rectas E D, E B, in angulis datis recta B E, unà cum E F, ad quam E D, habet rationem

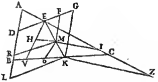
tionem daram data erir, quod vult propoſitio. Si igitur à puncto quodam ad poſitione duas rectas lineas inter ſe convenientes ducantur rectæ lineæ in datis angulis quarum una ſimul cum ea ad quam altera habet proportionem datam, data fuerit continget punctum rectam lineam poſitione datam.

PROPOSITIO VII.

SI ſint quoteumque rectæ lineæ poſitione datæ atque ad ipſas à quodam puncto ducantur rectæ lineæ in datis angulis, ſit autem quod datâ lineâ & ducta continetur, una cum contento datâ lineâ, & alterâ ductâ æquale ei, quod datâ, & aliâ ductâ & reliquâ continetur punctum rectam lineam poſitione datam, continget.

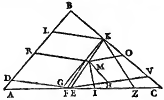
Hæc propoſitio eſt ampliatio præcedentis, & quod de duabus lineis eſt ſupetiùs demonſtratum in prima parte propoſitionis ſextæ, hîc in quoteumque locum habere proponitur.

Exponantur tres rectæ poſitione datæ & triangulum conſtituentes A B, BC, C A, eſt invenienda recta E K, verbi gratia in qua ſumendo quodlibet punctum vt M, & ab eo



ducendo rectas M R, M O, M I, in angulis datis. M R A, M O B, M I A, ſumma duarum O M, & M I, ſit ad M R, in ratione data, per primam partem propoſitionis præcedentis inveniatur recta in qua ſumendo quodlibet punctum & ab eo ducendo rectas ad rectas A B, B C, ductæ ſint in ratione datâ, dabitur poſitione recta quæſita, punctum igitur in quo concurret cum A C, dabitur, eſto E, à quo ducantur E V, E D, ipſis M O, M R, parallelæ, ergo ex conſtructione V E, ad E D, habebit rationem datam, eâdem methodo ſumptis A C, A B, rectis inveniatur punctum K, à quo ductæ K L, K Z, in datis angulis ipſis nempe M R, M I, parallelæ, ſint in ratione data Erit igitur ſimiliter K Z, ad K L, in ratione datâ, iungatur E K, quodeumque punctum in ea ſumpſeris præſtabit propoſitum. Sumatur M, verbi gratia ex jam conſtructis fiat M F, parallela B A, & M H, parallela B C, probandum eſt ſummam duarum O M, M I, eſſe ad M R ut V E, ad E D, in ratione nempe data, fiat adhuc K G, parallela B A, ponatur verum eſſe quod intendimus probare, ergo viciſſim erit ut M R, ad E D, ita ſumma duarum M I, M O, ad E V, & dividendo erit ut differentia M R, & D E, ad D E, ita differentia qua duæ O M, M I, ſuperant E V, ad E V, cum autem M F, ſic parallela B A, E F, erit differentia rectarum M R, & D E, & eum M H, ſit parallela B C, E H, erit differentia rectarum, M O, V E, ideoque differentia rectarum I M, & E H, æquabitur exceſſui quo duæ M O, M I, ſuperant rectam V E. Ex demonſtratis igitur erit E F, ad D E, ut differentia rectarum I M, E H, ad E V, & viciſſim E F, erit ad differentiam rectarum I M, E H, ut E D, ad E V, erit igitur convertendo differentia rectarum I M, E H, ad E F, in ratione data E V, ad E D, ex conſtructione autem (expoſitis tribus E H, E F, M I, eſt V E, ad E H, ut K E, ad E M, eſt etiam K Z, ad M I, in eadem ratione K E, ad E M, eſt etiam (eum K G, ſit parallela B A,) G E, ad E F in eadem ratione K E, ad E M, Igitur tres rectæ

V E, K Z, E G, ſunt in ratione trium H E, M I, E F, eſt igitùr ut differentia duarum E V, K Z, ad E G, ità differentia duarum M I, E H, ad E F, ſed probavimus



differentiam duarum M I, E H, ad E F, habere rationem datam E V, ad E D, igitur differentia duarum E V, K Z, ad E G habebit rationem datam E V, ad E D, & viciſſim differentia duarum E V, K Z, ad E V erit ut E G, ad E D, & componendo K Z, erit ad E V, ut G D, ad E D, ſed proptet perallelas K G, B A, K L, æquatue D G, igitur viciſſim erit ut K Z, ad K L, ita E V, ad E D, quod quidem ita ſe habere jam ex ipſa conſtructione innotuerat.

Conſtat itaquè veritas pulcherrimæ propoſitionis, nec eſt difficilis aut abſimilis ad ulteriores caſus, & quotlibet lineas porrigendas conſtructio, & demonſtratio, ſemper enim beneficio conſtructionis in duabus lineis expedietur problema in tribus lineis: beneficio conſtructionis in tribus lineis expedietur problema in quatuot lineis: beneficio conſtructionis in quatuor expedietur problema in quinque, & ſimili omninò ac uniformi in infinitum methodo.

PROPOSITIO VIII. & Ultima.

SI ab aliquo puncto ad poſitione datas parallelas ducantur rectæ lineæ in datis angulis quæ ad puncta in ipſis data abſcindant rectas lineas vel proportionem habentes vel ſpatium continentes datum, vel ita ut ſpecies ab ipſis ductis, vel exceſſus ſpecierum ſit æqualis ſpatio dato punctum continget poſitione datas rectas lineas.

Hujus propoſitionis (ſi vera eſſet) quatuor eſſent partes, ſed eam in ratione datâ, veram duntaxat deprehendimus; valeant igitur reliqua de ſpatio contento ſub duabus, & de ſumma, aut differentiâ quadratorum ab ipſis, & tanquam commentitia, aut huc aliundè tranſlata rejiciantur.

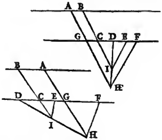
Proponatur itaque ſic emendatum Theorema.

Si ab aliquo puncto ad poſitione datas parallelas ducantur rectæ lineæ in datis angulis, quæ ad puncta in ipſis data abſcindant rectas lineas ptoportionem habentes datam, punctum continget poſitione datam rectam lineam.

Conſtructio ſic procedet.

Sint datæ parallelæ A B, G C, puncta in ipſis data A, & F, angulus unus ex datis B A H, alter G F H, cùm puncta A, & F, dentur, & anguli ad ipſa dabuntur, rectæ A H, F H, poſitione; ideóque punctum concurſus H, dabitur etiam punctum G, in qno A H, ſecat parallelam G C, recta G F, in puncto D, ita ſecetur ut G D, ad D F, ſit in ratione datâ, dabitur punctum D, jungatur D H, dabitur igitur poſitione D H. Aio rectam D H, præſtare propoſitum; Hoc eſt ſumpto in eâ quolibet puncto ut I,

& ab eo ductis I B, I E, in angulis datis abscissam A B, ad datum punctum A, ad abscis-



sam E F, ad datum punctum F, esse in ratione data G D, ad D F, secet B I, parallelam G F, in C, erit ex constructione I B, parallela H A, cùm fuerit demissa in angulo dato; hoc est ipsi H A B, æquali; erit etiam I E, parallela H F, G C, igitur propter parallelas æquatur A B, probandum superest, ut G C, ad E F, ita G D, ad D F, & vicissim ut G C, ad G D, ita E F, ad D F, hoc autem perspicuum est, ut enim H I, ad H D, ita G C, ad G D, & ut eadem H I, ad H D, ita E F, ad F D, esse igitur G C, ad E F, in ratione datâ sit perspicuum.

Sunt plures casus tam istius quàm præcedentium propositionum, quos invenire & addere cùm sit facile, cur in his diutiùs immoremur?

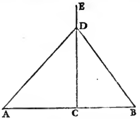
APOLLONII PERGÆI PROPOSITIONES DE LOCIS PLANIS RESTITUTÆ.

LIBER II.

PROPOSITIO I.

SI à datis punctis rectæ lineæ inflectantur, & sint quæ ab ipsis fiunt dato spatio differentia punctum positione datas rectas lineas continget.

Sint data duo puncta A, & B; & sit datum quodlibet spatium quadrato A B, minus: dividatur A B, in C, ita ut quadratum A C, quadratum C B, superet dato spatio; & educatur perpendicularis infinita C E, in qua sumatur quodlibet punctum D, & jungantur D A, B D, Aio quadratum A D, supe-

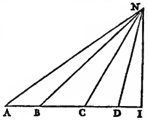


rare quadratum D B, dato. Quod quidèm patet, cùm quadratum A D, eodem superet quadratum D B, quo quadratum A C, superat quadratum C B.

Si spatium datum sit majus quadrato A B, punctum C, extra lineam A B, cadet. Ad hanc propositionem pertinere possunt duæ sequentes.

Sint data quatuor puncta A B C D, in rectâ lineâ, & sit A B, æqualis C D, sumatur aliud quodcumque punctum ut N, & jungantur quatuor rectæ N A, N B, N C, N D, Aio duo quadrata A N, N D, superare duo quadrata B N, N C, rectangulo sub A B, in B D, bis.

Nam ducatur perpendicularis N I, & primum punctum I, extra rectam lineam AD, cadat: patet igitur excessum quadratorum A N, N D, super duo quadrata B N, NC, propter omnibus commune quadratum N I, esse id, quo duo quadrata A I, ID, superant duo quadrata B I, C I, sed quadrata duo A I, D I, per quartam secundi æquantur quadrato D I, bis, quadrato A D, & rectangulo A D I, bis; quadrata verò B I, C I, per eamdem propositionem æquantur quadrato D I, bis quadratis B D,

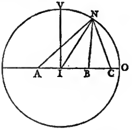


C D, & rectangulis sub B D, in D I, bis, & C D, in D I, bis, sive loco horum duorum rectangulorum uni rectangulo A D, in D I, bis, propterea quod A B, est æqualis C D, excessus igitur quadratorum A I, I D, super B I, C I, est idem qui A D, quadrat. super quadrata B D, C D, sive A B. Sed per quartam propositionem 2ª. quadratum A D, duo quadrata A B, B D, superat rectangulo sub A B, in B D, bis; constat ergo propositum.

Reliquos casus non adjungo neque in hac propositione neque in sequentibus, nam licèt sit facile, esset tædiosum.

Si à tribus punctis in rectâ lineâ constitutis inflectantur rectæ, & sint duo quadrata tertio majora, spatio dato, punctum positione datum circumferentiam continget.

Sint data tria puncta A B C, in rectâ lineâ, & datum quodlibet spatium rectangulo A B C, bis majus; fiat A I, æqualis B C, & spatium datum sit æquale rectangulo A B C, bis, & quadrato I V, centro I, intervallo I V, circulus V N O, describatur in cujus circumferentia punctum quodlibet sumatur ut N, junganturque N A, N B, N C, ad data puncta, aio duo quadrata A N, N C, quadratum N B, dato spatio superare; nam jungatur I N, ergò ex superiore propositione patet duo quadrata A N,

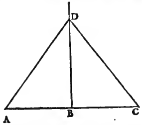


N C, æquari duobus quadratis I N, B N, & rectangulo A B C, bis, ergo duo quadrata A N, N C, superant quadratum N B, quadrato I N, & rectangulo A B C, bis, & constat propositum.

PROPOSITIO II.

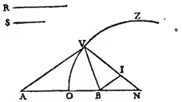
SI à duobus punctis inflectantur rectæ, & sint in proportione datâ, punctum continget vel rectam lineam, vel circumferentiam.

Sint data duo puncta A, & C, & sit primùm data ratio æqualitatis: dividatur A C



bifariam in B, & excitetur perpendicularis B D, patet quodcumque punctum in ipsa sumatur ut D, fore rectos A D, D C, æquales.

Sed sit data ratio inæqualitatis.

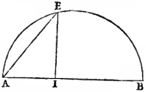


Et sint duo data puncta A, B, ratio ut R, ad S, fiat ut R, quadratum ad S, & ita A N, ad N B, inter A N, N B, sumatur media N O, cujus intervallo describatur circulus N O Z, & in ipsius circumferentia sumatur quodcumque punctum ut V, junganturque V A, V B, Aio esse in datâ ratione R, ad S, nam iuncta V N, ipsi V A, parallela sit B I, ut A N, ad N O, sive N V, ad N B, & sunt circà eumdem angulum A N V,, similia igitùr duo triangula A N V, B V N, & angulus V A B, angulo B V I, æqualis, Sed & A V B, V B I, propter parallelas æquales sunt, ergò similia triangula A V B, V B I, & est A V, ad V B, ut V B, ad B I, & ut V B, ad B I, id est A N, ad N B, id est R, quadratum ad S. quadratum, ita A N, quad. ad V B, Quad. est ergò A V, ad V B, ut R, ad S, & patet propositum.

PROPOSITIO III.

Si sit positione data recta linea, & in ipsa datum punctum à quo ducatur quædam linea terminata, à termino autem ipsius ducatur, & ad positionem, & sit quod sit à ductâ æquale ei quòd à datâ, & abscissâ, vel ad datum punctum, vel ad alterum datum in linea datâ positione, terminus ipsius positione datam circumferentiam continget.

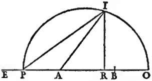
Sit data recta A B, positione & in ipsa datum punctum A, oportet invenire circuli circumferentiam in quâ sumendo quodlibet punctum ut E, & demittendo perpendicularem E I, quadratum A E, sit æquale rectangulo sub datâ qualibet rectâ &



A I. (per quam debemus intelligere in hâc propositione abscissam ad datum punctum) sit recta data A B, super A B, describatur semicirculus; patet ex constructione A B, in A I, æquari quadrato A E.

Sed alius casus est difficilior quandò videlicèt recta abscinditur ad aliud punctum quàm A, ut in hoc exemplo.

Sint data duo puncta A B, & præterea punctum E, in eâdem recta lineâ; recta

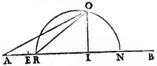


verò data sit A B, oportet invenire circuli circumferentiam ut P I O, in quâ sumendo quodlibet punctum ut I, & demittendo perpendicularem I R, quadratum A I, æquetur rectangulo sub rectâ A B, datâ & rectâ, E R, rectangulum B A E; ad rectam B A, applicetur excedens figura quadrata & faciat latitudinem rectam A P, cui fiat æqualis B O, super P O, descriptus semicirculus præstabit propositum, nam quadratum A I, æquatur quadrato A R, & quadrato R I, quadratum verò R I, æquatur rectangulo, P R O, & rectangulum P R O, rectangulis A R B, O A P, hoc est B P A, hoc est B A E, ut mox demonstrabitur, quadratum ergo A I, æquatur quadrato A R, rectangulo A R B, & rectangulo B A E, sive quadratum A I, æquatur rectangulo B A R, (nam huic rectangulo æquantur quadratum A R, & rectangulum A R B,) & rectangulo B A E, & adhuc hæc duo rectangula faciunt unum rectangulum sub B A, in E R, quod proindè quadrato A I, est æquale; probandum superest

rectangulum P R O, duobus rectangulis ARB, & P B O, æquale esse, nam ducendo inter se partes rectangulum PR O, est æquale singulis rectangulis PA, in RB,PA, in B O, hoc est B O, quadrato A R, in R B, AR, in B O, id est P A, in A R, sed duo P A, in A R, & P A, in R B, æquantur P A, in A B, sivè AB, in A O, una cum BO, quadrato æquatur A O B, hoc est P B O, ergò rectangulum A R B, una cum rectangulo P B O, facit rectangulum P R O, quòd erat demonstrandum.

Diversos casus non prosequor, sed ex jam dictis facillimum erit: videtur tamen alius hujus propositionis casus non omittendus quando videlicet punctum E, ultra A, ut superiùs non invenitur.

Sint data duo puncta A, & E, & recta data A B, & sit invenienda circuli circumferentia ut N O R, ita ut sumendo quodlibet in ipsa punctum ut O, & demittendo

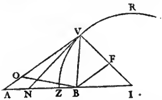


O I, perpendicularem, quadratum A O, sit æquale rectangulo sub B A, in E I, rerectangulum B A E, ad rectam B A, applicetur deficiens in figura quadrata in R, & ipsi A R, fiat æqualis B N super R N, descriptus semicirculus præstabit propositum. Demonstratio verò non est absimilis ei quam in priore casu attulimus.

PROPOSITIO IV.

Si à duobus punctis datis rectæ lineæ inflectantur, & sit quod ab una efficitur eo quòd ab altera dato majus quàm in proportione, punctum positione datum circumferentiam continget.

Sint duo puncta A, & B, ratio data A I, ad I B, spatium datum B A N, inter N I, & I B, media sit I Z, cujus intervallo describatur circulus Z V R, in quo sumatur



quodlibet punctum ut V, & jungantur V A, V B, Aio quadratum A V, quadrato V B, Majus esse quam in proportione data I A, ad B I, spatio dato B A N, nam fiat ipsi æquale rectangulum V A O, & jungantur O B, N V, V I, & ipsi A V, parallela B F, probandum est rectangulum A V O, ad quadratum V B, esse ut A I, ad I B, est ut N I, ad I Z, id est V I, ut V I, ad I B, & sunt circa eumdem angulum, ergò duo triangula N I V, V B I, sunt similia, & angulus N V B, angulo B V F, æqualis

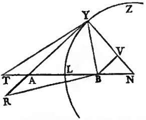
sed

ſed angulus V N B, angulo V O B, eſt æqualis in eadem ſectione, cum quatuor puncta N, B, V, O, ſint in circulo propter æqualia rectangula B A N, V A O, ergò angulus V O B, angulo B V F, eſt æqualis, ſed & angulus O V B, angulo V B F, propter parallelas, ergò duo triangula O B V, B V F, ſint ſimilia & ut O V, ad V B, ita V B, ad B F, addatur utrinque communis ratio A V, ad V B, ergò ratio compoſita ex A V, ad V B, & ex V B, ad B F, hoc eſt ratio A V, ad B F, id eſt A I, ad I B, erit eadem rationi A V, ad V B, & O V, ad V B, hoc eſt rectanguli A V O, ad quadratum V B, quod demonſtrare oportebat.

Videtur Pappus omiſiſſe hoc loco propoſitionem huic ſimilem quæ ita ſe habet.

Si à duobus punctis datis rectæ lineæ inflectantur & ſit quod ab una efficitur eo quod ab altera, dato minùs quam in proportione, punctum poſitione datum circumferentiam continget.

Sint data duo puncta A, & B, ratio A N, ad N B, ſpatium B A T, inter T N, N B, eſto media N L, cujus intervallo deſcribatur circuli circumferentia L Y Z, in qua ſumpto quolibet puncto Y, jungantur Y A, Y B, aio quadratum Y A, unà cum

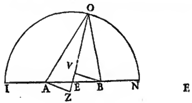


rectangulo B A T, dato, ad quadratum Y B, eſſe ut A N, ad N B, nam fiat Y A R, æquale B A T, & jungantur T Y, R B, Y N, & ipſi A Y, parallela B V, propter B A T, Y A R, æqualia rectangula probabitur angulus Y T B, angulo Y R B, æqualis & reliqua ut in ſuperiore demonſtratione.

PROPOSITIO V.

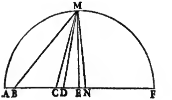
Si à quotcunque datis punctis ad punctum unum inflectantur rectæ lineæ, & ſint ſpecies, quæ ab omnibus fiunt, dato ſpatio æquales, punctum continget poſitione datam circumferentiam.

Sint data duo primùm puncta AB, quæ per rectam A B, conjungantur, bifariam ſcindatur in E, centro E, interuallo quocumque ut E I, circulus deſcribatur ut I O N.



dico quodcumque punctum in ipsius circumferentia sumpseris ut O, evenire ut quadrata A O, O B, simul quadratorum I E, A E, sint dupla. Nam junctâ rectâ E O, in ipsam B V, A Z, perpendiculares demittantur, in triangulo A E O, quadratum A O, æquatur quadratis A E, E O, & rectangulo O E Z, bis, in triangulo O E B, quadrata O E, E B, æquantur quadrato O B, & rectangulo O E V, bis, sive O E Z, bis cum E V, sit æqualis E Z, propter æquales A E, E B, ergò jungendo æqualia æqualibus, quadrata A O, O B, & rectangulum O E Z, bis, æquantur quadratis A E, E B, sive quadrato E A, bis & quadrato E O, bis, id est quadrato I E, bis, unà cum rectangulo O E Z, bis, auferatur utrinque O E Z, bis, supererit verum quod asserebamus, & constat propositum in primo casu.

Sint data tria puncta B, D, E, in recta linea & sit recta B D, recta D E, major, differentiæ inter B D, & D E, sit tertia pars C D, centro E, intervallo quocumque vt E A, describatur semicirculus A M F, aio quodcumque punctum in ipsius circumferentia

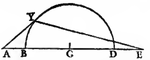


sumpseris ut M, eandem semper fore summam trium quadratorum M B, M D, M E, nam jungantur M B, M C, M D, M E, ipsi vero C D, fiat æqualis E N, & jungatur M N, cum B D, superet D E, triplâ C D, sive triplâ E N, ergo D N, unà cum duplâ C D, æquabitur B D, & C N, unà cum C D, æquabitur B D, auferatur utrinque C D, ergo C N, æquabitur B C, cum C D, sit æqualis E N, per secundam hujus libelli propositionem, idem erit semper excessus quadratorum C M, M N, super duo quadrata D M, M E, sed C M, quadratum est semper idem: ergò duo quadrata D M, M E, semper vel quadrato M N, æqualia erunt vel in idem excedent, vel in idem deficient. Addatur utrinque quadratum M B, ergò tria quadrata M B, M D, M E, duobus quadratis B M, M N, vel semper æqualia erunt, vel in idem excedent, vel in idem deficient, sed B M, M N, quadrata idem semper constant spatium ex superiori propositione propter æqualitatem rectarum B C, C N, ergò quadrata B M, D M, E M, idem semper spatium conficiunt, quod erat demonstrandum.

DEMONSTRATIO GENERALIS
EJUSDEM PROPOSITIONIS.

Exponantur primò duo puncta A, & E, jungatur A E, & bifariam dividatur in C, planum datum sit Z, quod necessariò debet esse non minùs quadratis duobus A C, A E, ut patet, si sit æquale illis duobus quadratis, punctum C, tantùm proposito satisfaciet; nec erit aliud punctum à quo junctarum ad puncta A E, quadrata simul sumpta æquentur Z, plano.

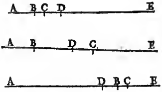
Si sit majus duobus quadratis A C, C E, excessus dimidium æquetur quadrato



C B, centro C, intervallo C B, descriptus circulus satisfaciet proposito, quod tanquam à Pappo demonstratum & ab aliis, & proclive nimis omittemus ne in facilibus diutiùs immoremur.

Lemma ad generalem methodum.

Exponantur in 1. 2. & 3. figura quotlibet puncta data A B C E, & pro numero punctorum sumatur rectarum puncto A, & reliquis datis terminatarum pars condirionaria A D, quadrans nempe in hoc exemplo; sit igitur A D, pars quarta rectarum A B, A C, A E, puncti D, diversa est positio prout variant casus. Aio rectas punctis datis & puncto D, à parte puncti A terminatas æquari rectis, punctis datis, & puncto D, à parte puncti E, terminatis, in 1. nempe figura rectam E D, æquari rectis A D, B D, C D, in 2. figura rectas E D, C D, æquari rectis B D, A D, & in 3. figura rectas E D, C D, B D, æquari A D, in 1. & in 3. figura ex hypothesi quater A D,



1. Figura. *2. Figura.* *3. Figura.*

æquatur rectis A B, A C, A E, dematur utrinque A D, ter, remanebit illi A D, semel, sed auferre A D, ter, ab ipsis A B, A C, A E, idem est atque auferre A D, semel ab unaquaque ipsarum A B, A C, A E, quo peracto remanebunt istinc B D, C D, E D, æquales A D, quod erat demonstrandum.

Si darentur quinque puncta A D, quinquies esset conferenda cum quatuor rectis punctis datis & puncto A, terminatis: denique uniformi procederetur in infinitum methodo.

In 2. figura A D, quater, æquatur rectis A B, A C, A E, auferatur utrinque A D, ter, & addatur B D, remanebunt A D, B D, æquales E D, C D.

In 1. figura A D, quater æquatur rectis A B, A C, A E, addatur utrinque B D, C D, & dematur A D, ter, remanebunt rectæ A D, B D, C D, æquales rectæ D E.

Nec dissimilis est in quotlibet in infinitum punctis methodus, idemque concludetur quacunque ratione varient casus.

Lemma Alterum.

EXponatur in 1. figura conſtructio præcedens & ſumatur in eadem recta punctum N, utcumque. Aio quadrata rectarum punctis datis & puncto N, terminatarum ſuperare quadrata rectarum punctis datis, & puncto D, terminatarum quadrato D N, toties ſumpto quot ſunt puncta data, quater nempe in hoc exemplo.

Secunda & tertia figura varios caſus repræſentant.

1. Figura.



2. Figura.



3. Figura.



In 1. figura quadrata A N, B N, E N, ſuperant quadrata A D, B D, C D, ſi unumquodque unicuique conferas. quadrato D N, ter & rectangulis A D, in DN, bis, B D, in D N bis C D, in D N, bis, quadrata igitur A N, B N, C N, æquantur quadratis, A B, B D, C D, quadrato D N, ter, & rectangulis A D, in D N, bis, D B, in D N, bis, & C D, in D N, bis : illud autem patet ex geneſi quadrati à binomia radice affirmatâ effecti. Ex alia autem parte quadratum E N, æquatur quadratis E D, N D, minùs E D, in DN, bis, illudque patet ex geneſi quadrati à binomia radice negata effecti. Ergò quadrata quatuor A N, B N, C N, E N, æquantur quadratis quatuor A D, B D, C D, E D, quadrato D N, quater, rectangulis A D, in D N, bis, B D, in D N, bis, C D, in D N, bis, minus E D, in D N, bis, ſi igitur probaverimus rectangula negata æquivalere affirmatis manebit veritas propoſitionis ſtabilita, nempe quadrata A N, B N, C N, E N, ſuperare quadrata A D, B D, C D, E D, quadrato D N, quater.

Probandum igitur rectangulum E D, in D N, bis, æquari rectangulis A D, in D N. bis, B D, in D N, bis, C D, in D N, bis; & omnibus ad D N, applicatis rectam E D, æquari rectis A D, B D, C D, quod quidem ita ſe habere ſuperius lemma demonſtravit.

Varios caſus non moramur, ſi ſint quinque puncta quadrata punctis datis, & puncto N, terminata, ſuperabunt quadrata punctis datis & puncto D, terminata, quintuplo quadrati D N, nec differt à tradito caſu ulterior demonſtratio.

Inde patet ſummam quadratorum puncto D, terminatorum eſſe minimam.

Dum tibi loquimur, ſcrupuloſam nimis caſuum obſervationem non adjungimus. Concluſio ſecundi Lemmatis ſemper eò deducetur ut probentur rectangula omnia ex una parte affirmata æquari negatis ex alterâ, ideoque res ad primum Lemma deducetur.

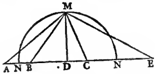
PROPOSITIO I. Generalis.

EXponatur ſuperior figura & ſint data quatuor puncta in recta A E, A, B, C, E, eſto A D, quarta pars (conditionaria nempe) rectarum A B, A C, A E, & ſit datum Z, planum. Proponitur invenire circulum in quo ſumendo quodlibet punctum, & ab eo jungendo rectas ad puncta data quadrata junctarum ſimul ſumpta æquentur ſpa-

tio dato, Z, planum debet esse majus quatuor quadratis A D, B D, C D, E D, ut locum habeat propositio ex superius demonstratis.

Arguetur igitur quatuor illis quadratis, & præterea quadruplo quadrati D N, centro D, intervallo D N, descriptus circulus præstabit propositum.

Nam sumatur primo punctum N, ex utravis parte, demonstratum est secundo Lemmate quadrata A N, B N, C N, E N, æquari quadratis, A D, B D, C D, E D, & præterea quadrato D N, quater, at quadrata A D, B D, C D, E D, unà cum quadrato D N, quater æquantur Z, plano, ergo quadrata quatuor A N, B N, C N, E N, æquan-



tur Z, plano, hoc est spatio dato quod erat demonstrandum.

Excitetur deinde perpendicularis D M, & jungantur A M, B M, C M, E M. Aio quatuor illa quadrata æquari spatio dato Z, plano, nam quadratum A M, æquatur quadrato A D, & quadrato D M.

Quadratum B M, æquatur quadrato B D, & quadrato D M.

Quadratum C M, æquatur quadrato C D, & quadrato D M.

Quadratum E M, æquatur quadrato E D, & quadrato, D M.

Ergò quatuor quadrata A M, B M, C M, E M, æquantur quadratis quatuor A D, B D, C D, E D, unà cum quadrato D M, sivè D N, quater, ut quadrata A D, B D, C D, E D, unà cum quadrato D N, quater æquantur Z. plano seu spatio dato, ergo quadrata quatuor A M, B M, C M, E M, æquantur spatio dato, quod erat demonstrandum.

Sed sumatur ubicumque punctum M, à quo demittatur perpendicularis M O, Similiter probabitur quadrata A M, B M, C M, E M, æquari quadratis A O, B O,

Z



C O, E O, quæ ex secundo lemmate æquantur quadratis A D, B D, C D, E D, & præterea quadrato O D, quater, ergo quadrata quatuor A M, B M, C M, E M, æquantur quadratis A D, B D, C D, E D, unà cum quadrato O D, quater, & præterea quadrato O M, quater, sed quadratum O D, quater, unà cum quadrato O M, quater æquatur quadrato D M, quater sive quadrato D N, quater, sunt enim D M, D N, ex centro æquales inter se, igitur quadrata A M, B M, C M, E M, æquantur quadratis A D, B D, C D, E D, unà cum quadrato D N, quater, ideoque spatio dato Z, plano sunt æqualia, quod erat demonstrandum.

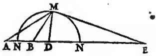
Si compleantur circuli, eadem demonstratio in aliis semicirculis locum habebit, &

ad quotlibet puncta eadem facilitate & argumentatione extendetur, semper enim toties sumentur quadrata D M, D N, D O, quot erunt puncta nec fallet ratiocinatio.

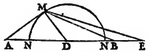
Inde sequitur corollarium cujus usus in sequenti propositione.

Exponantur quotlibet puncta data, verbi gratia, tria A, B, E, & inveniendus circulus D N M, in quo sumendo quodlibet punctum ut M, & jungendo rectas A M,

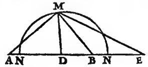
A D 4. pars A B 2. + E.



A D 4. pars A B + E.



A D 4. pars A B + A E.



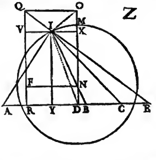
B M, E M, quadrati A M, duplum (verbi gratia) una cum quadratis B M, E M, æquentur spatio dato, eo casu sumenda est ad constructionem recta A D, pars quarta rectarum A B, A E, quia hoc casu punctum A, gerit vicem duorum punctorum & idem est ac si diceretur datis punctis quatuor A, A, B, E, invenire circulum N M, in quo sumendo quodlibet punctum ut M, quadrata quatuor A M, A M, B M, E M, æquentur spatio dato, idem est intelligendum in alio quovis puncto, & alia qualibet ratione multiplici, nam proponatur quadratum A M, una cum quadrato E M, bis, & quadrato E M, æquari spatio dato, sumenda est A D, quarta pars rectarum A B, bis & A E, quod advertisse & monuisse fuit necesse, nec indiget res majori explicatione.

PROPOSITIO ALTERA.

EXPONANTUR quotlibet puncta data in recta A E, quatuor (verbi gratia) A, B, C, E, & punctum Z. extra rectam A E, quæritur circulus ut M I, in quo sumendo quodlibet punctum ut I. quadrata A I, B I, C I, E I, Z I, æquentur spatio dato.

Demittatur in rectam A E, perpendicularis Z R, & rectarum A R, A B, A C, A E, sumatur pars conditionaria (quintans nempe in hac specie in qua dantur quinque puncta) A D, & excitata perpendiculari D O, demittatur in ipsam perpendicularis Z O, rectæ Z R, sumatur pars conditionaria (quintans nempe) R F, sive D N, & sit spatium datum æquale quinque quadratis A D, R D, B D, C D, E D, & præterea Z,

plano Z, planum æquetur D N, quater (pro numero nempe punctorum in recta A E, datorum) quadrato N O, & præterea quadrato N M, quinquies, (pro nume-



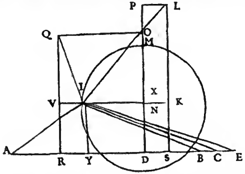
ro omnium punctorum datorum) aio circulum centro N, intervallo N M, descriptum præstare propositum: sumatur in eo quodlibet punctum ut I, & junctis A I, B I, C I, E I, QI, ducatur V I X, parallela A E, & I Y, parallela O D, patet quadratum D I, quater unà cum quadrato O I, æquari Z, plano ex corollario præcedentis propositionis, punctum enim D, gerit vicem quatuor punctorum, cum igitur D N, sit quintans O D, patet quadratum D I, quater unà cum quadrato O I, æquari quadrato D N, quater, quadrato O N, & quintuplo quadrati N M, sed per constructionem quadratum D N, quater una cum quadrato O N, & quintuplo quadrati N M, æquatur Z, plano. Ergo quadratum D I, quater unà cum quadrato O I, æquatur Z, plano.

Sed quadratum D I, quater æquatur quadrato D X, quater, & quadrato X I, quater, & quadratum O I, æquatur quadrato O X, & quadrato X I, ergo Z, planum æquatur quadrato D X, sive I Y, quater quadrato X O, sive V Q. semel & quadrato XI, quinquies, addantur utrinque quadrata quinque A D, R D, B D, C D, E D, fiet inde spatium datum, hæc enim quinque quadrata, cum Z, plano, ex hypothesi æquantur spatio dato, inde verò quinque, quadratis A I, B I, C I, E I, QI, quæ proinde æquabuntur spatio dato; hoc ut constet ex 2. lemmate quadrata A D, R D, B D, C D, E D, unà cum quadrato D Y, quinquies, æquabuntur quadratis A Y, R Y, B Y, C Y, E Y, igitur quadrata A D, R D, B D, C D, E D, addita quadrato I Y, quater, V Q, semel, & D I, quinquies æquabuntur quadratis A Y, R Y, B Y, C Y, E Y, unà cum I Y, quater, & V Q, semel singulis quadratis A Y, B Y, C Y, E Y, addatur quadratum I Y, fient quadrata ta A I, B I, C I, E I, æqualia quadratis A Y, B Y, C Y, EY, & præterea quadrato I Y, quater, igitur quadrata A D, R D, B D, C D, E D, addita quadrato I Y, quater V Q. semel & D Y, quinquies æquabuntur quadratis A I, B I, C I, I E, & præterea quadrato R Y, & quadrato V Q. semel. Sed quadratum R Y, sive QI, unà cum quadrato Q V, æquatur quadrato QI, igitur quadrata A R, R D, B D, C D, addita quadrato I Y, quater, VQ, semel, & D Y, quinquies æquabuntur quadratis A I, B I, C I, E I, & QI, at probandum est quadrata illa o mnia æquari spatio dato. Ergò quadrata quinque A I, B I, C I, E I, & QI, æquantur spatio dato, quod erat demonstrandum.

Inde facillimè deducitur spatium datum æquari quadratis A N, B N, C N, E N, QN,

& quintuplo quadrati N M, quod tanquam facile prætermittimus.

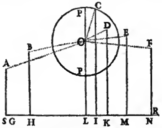
Imò & ad quotlibet puncta producetur artificium eadem ratione, si enim dentur duo puncta Q, & L, extra lineam, perfectâ constructione, ut vides, sumetur A D,



sextans rectarum A R, A S, A B, A C, A E, rectarum Q R, & L S, sextans D N, sumetur, spatium datum fiet æquale quadratis A D, R D, S D, B D, C D, E D, & præterea quadrato D N, quater, N O, semel, N P, semel & N M, sexties, & reliqua perficientur eadem ratione, semperque punctum B, vicem geret omnium punctorum in rectâ A E, datorum, & puncta P O, vicem gerent datorum punctorum Q, & L, & cætera in infinitum uniformi methodo conserventur, & demonstrabuntur.

Sed quoniam multiplices casus oriuntur ex diversa rectæ assumptæ duo vel plura puncta contingentis positione, dum puncta reliqua diversas ex parte qualibet rectâ assignata sortiuntur positiones. (licèt unicuique casui sua competant compendia) placet in artis specimen generaliùs ostendere & construere.

Dentur quotlibet puncta A, B, C, D, E, F, sive in eadem recta sive in diversis, sumatur in eodem plano recta quævis S R, ita ut omnia puncta data sint ex una



parte rectæ S R, demissis perpendicularibus A G, B H, C I, D K, E M, F N, sumatur rectarum G H, G I, G K, G M, & G N, pars conditionata sextans nempe in hoc casu, excitetur perpendicularis L O, à qua resecetur L O, pars conditionaria sex-

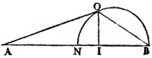
sextans nempe rectarum A G, B H, C I, K D, E M, F N, & sit spatium datum æquale quadratis A O, B O, C O, D O, E O, F O, & sextuplo quadrati O P, circulus centro, O, intervallo O P, descriptus satisfaciet propositioni, nec difficilis est inventio ei qui superiores noverit.

PROPOSITIO VI.

SI à duobus punctis datis inflectantur rectæ lineæ, à puncto autem ad positione dictam lineam abscissa à recta linea positione data ad datum punctum, & sint species ab inflexis æquales ei quod à data & abscissâ continetur, punctum ad inflexionem positione datam circumferentiam continget.

Descripsi propositionem quemadmodum reperitur apud Pappum ex versione Federici Commandini, sed vel in textu græco vel in interpretatione mendum esse non dubito. Sensum propositionis exponam.

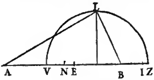
Sint duo puncta A, & B, oportet invenire circumferentiam ut N, O, B, in qua sumendo quodlibet punctum ut O, & iungendo rectas O A, O B, & demittendo



perpendicularem O I, rectangulum sub recta data in A I, æquetur duobus quadratis A O, O B, sit primum A, B, recta data, qui casus satis est facilis, sumatur ipsius A B, dimidium B N, superque B N, semicirculus describatur, aio satisfacere propositio, hoc est si sumatur, verbi gratia, punctum O, rectangulum B A I, duobus quadratis A O, O B, æquale esse; nam A O, quadratum æquatur A I, quadrato & I O, quadrato si à rectangulo B A I, auferatur quadratum A I, & quadratum I O, sivè rectangulum B I, in I N, superest rectangulum sub B I, in A N, sive in N B, quod probandum est esse æquale quadrato B O, & patet ex constructione ita se habere.

Secundus casus est quando recta data major est rectâ A B, cujus constructionem dabimus modo recta data sit minor duplâ A B.

Sint data duo puncta A, & B, & recta A I, duplâ A B, minor ex hypotesi; oportet



facere quod proponitur. Recta A B, bifariam secetur in N, & fiat N E, ipsius B I, dimidia quod ex constructione licet, rectangulum I B N, ad rectam B E, applicetur, excedens figurâ quadratâ, & faciat latitudinem rectam E V, cui fiat æqualis recta B Z, & super V Z, describatur semicirculus V L Z, aio satisfacere proposito, nam junctis

F

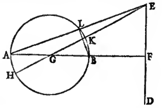
L A, L B, & demissa perpendiculari L O, cujus primus casus sit inter, E, & B, patet ex demonstratis ad propositionem tertiam Appollonij triangulum E O B, unà cum rectangulo V E Z, sive N B I, æquari quadrato, O L, addatur utrinque quadratum O B, rectangulum E B O, unà cum N BI, æquabitur quadrato L O, & quadrato O B, duplicetur rectangulum E B O, bis, unà cum rectangulo N B I, bis, sive solo A B I, æquabuntur quadratis L O, O B, bis, sive A B, in B O, semel unà cum A B, in B I, æquabuntur quadratis L O, O B, bis, una cum rectangulo sub N E, in O B, bis, sive I B O, semel, ex constructione utrinque auferetur quadratum O B, supererit A O B, unà cum A B I, æquale quadrato L O, bis, quadrato O B, semel, & rectangulo I B O, utrinque I B, in B O, auferatur nempe illinc ex rectangulo A B I, supererit A O, in O B, unà cum A O, in B I, sine solum rectangulum I O A, æquale quadrato L O, bis & quadrato O B, semel, Addatur utrinq; quadratum A O, erit rectangulum I O A, quadrato A O, O B, unà cum L O, quadrato bis, æquale, id est duobus tantùm quadratis, A L, & L B, quod erat faciendum. Ccasus alios prætermitto.

PROPOSITIO VII.

SI in circulo positione dato sit datum punctum, perque ipsum agatur quædam recta linea, & in ipsa punctum extra sumatur, sit autem quod fit à linea ducta usque ad punctum intra datum æquale ei quod à totâ & extra sumptâ, vel soli vel unà cum eo, quod duabus quæ intra circulum portionibus continetur, punctum extra sumptum positione datam rectam lineam continget.

Hæc propositio duas habet partes, quarum prior est apud ipsum Pappum propos. 157. libri septimi, secunda per additionem æqualium ex priore derivari facilè potest. Pappi igitur demonstrationem tantum adducemus.

Sit circulus circa diamerrum A B, & A B, producatur sitque ad quamlibet rectam lineam D E, perpendicularis; rectangulo autem A F B, æquale ponatur quadratum ex



F G, dico si quodcunque sumatur punctum ut E, atque ab eo ad punctum G, recta linea ducta producatur ad H, rectangulum etiam H E K, quadrato ex E G, æquale esse, jungantur A E, B L, erit angulus ad L, rectus, sed & rectus qui ad F, rectangulum igitur A E L, est æquale, & rectangulo A F B, & quadrato ex F E, quoniam enim angulus A L B, rectus est, æqualis recto A F E, sunt quatuor puncta L, B, F, E, in circulo ac propterea rectangulum F A B, æquale rectangulo E A L, quadratum autem ex A E, est æquale duobus quadratis A F, F E, sed quadrato ex A E, æqualia sunt utraque rectangnla A E L, E A L, & similiter quadrato ex A F, æqualia utraque rectangula A FB, F A B, ergo rectangula A E L, E A L, æqualia sunt rectangulis A F B, F A B, & qua-

drato ex F E, quorum rectangulum F A B, est æquale rectangulo E A L, reliquum igitur rectangulum A E L, rectangulo A F B, & quadrato ex F E, æquale erit, rectangulum autem A E L, æquale est rectangulo H E K, & rectangulum A F B, quadrato ex F G, ergo rectangulum H E K, quadratis ex E F, E G, hoc est quadrato ex E G, est æquale.

PROPOSITIO VIII. & Ultima.

ET si hoc quidem punctum contingat positione datam rectam lineam circulus autem non ponatur, quæ sunt ad utrasque partes dati puncti contingent positione eandem datam circumferentiam.

Hæc propositio est conversa præcedentis & ex ea facile elici potest hujus demonstratio si contraria via utamur.

Determinationes & casus non adjungimus quia ex constructione & demonstratione satis patent.

DE ÆQUATIONUM LOCALIUM TRANSmutatione, & emendatione, ad multimodam curvilineorum inter se, vel cum rectilineis comparationem.

CVI ANNECTITVR

PROPORTIONIS GEOMETRICÆ in quadrandis infinitis parabolis & hyperbolis usus.

IN unica paraboles quadraturâ proportionem geometricam usurpavit Archimedes. In reliquis quantitatum heterogenearum comparationibus, arithmeticæ dumtaxat proportioni sese adstrinxit. An ideo quia proportionem geometricam minùs τετραγωνίζειν est expertus? An verò quia peculiare ab illa proportione petitum artificium ad quadrandam primariam parabolam, ad ulteriores derivari vix potest? Nos certe hujusmodi proportionem quadrationum feracissimam & agnoscimus, & experti sumus, & inventionem nostram quæ eadem omnino methodo & parabolas & hyperbolas quadrat, recentioribus geometris haud illibenter impertimur.

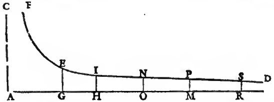
Unico quod notissimum est proportionis geometricæ attributo, tota hæc methodus innititur.

Theorema hoc est: Datâ quavis proportione geometricâ cujus termini decrescant in infinitum, est ut differentia terminorum progressionem constituentium, ad minorem terminum, ita maximus progressionis terminus ad reliquos omnes in infinitum sumptos.

Hoc posito, proponantur primo hyperbolæ quadrandæ. Hyperbolas autem definimus infinitas diversæ speciei curvas, ut D S E F, quarum hæc est proprietas, ut positis in quolibet angulo dato R A C, ipsarum asymptotis rectis A R, A C, in infinitum, si placet, non secùs ac ipsa curva extendendis, & ductis uni asymptoton parallelis rectis quibuslibet G E, H I, O N, M P, R S, &c. sit ut potestas quædam rectæ A H, ad potestatem similem rectæ A G, ita potestas rectæ G E, vel similis vel diversa à præcedente, ad potestatem ipsi homogeneam rectæ H I, potestates autem intelligimus, non so-

ſùm quadrata, cubos, quadratoquadrata, &c. quarum exponentes ſunt. 2. 3. & 4. &c. ſed etiam latera ſimplicia, quorum exponens eſt unitas. Aio itaque omnes in infinitum hujuſmodi hyperbolas, unicâ demptâ, quæ Apolloniana eſt, ſive primaria, beneficio proportionis geometricæ uniformi & perpetua methodo quadrari poſſe.

Exponatur, ſi placet, hyperbola, cujus ea ſit proprietas, ut ſit ſemper ut quadratum rectæ H A, ad quadratum rectæ A G, ita recta G E, ad rectam H I, & ut quadratum



O A, ad quadratum A H, ita recta H I, ad rectam O N, &c. Aio ſpatium infinitum, cujus baſis G E, & curva E S, ex uno latere, ex alio vero aſymptotos infinita G O R, æquari ſpatio rectilineo dato. Fingantur termini progreſſionis geometricæ in infinitum extendendi, quorum primus ſit A G, ſecundus A H, tertius A O, &c. in infinitum, & ad ſe ſe per approximationem tantum accedant quantum ſatis ſit ut juxta Methodum Archimedæam, parallelogrammum rectilineum ſub GE, in G H, quadrilineo mixto GHF, adæquetur, ut loquitur Diophantus, aut ferè æquetur.

GE, in G H.

Item ut priora ex intervallis rectis proportionalium G H, H O, O M, & ſimilia ſint ferè inter ſe æqualia, ut commodè per ἀπαγωγὴν εἰς ἀδύνατον, per circumſcriptiones & inſcriptiones Archimedæa demonſtrandi ratio inſtitui poſſit, quod ſemel monuiſſe ſufficiat, ne artificium quibuſlibet geometris jam ſatis notum inculcare ſæpius & iterare cogamur.

His poſitis, cum ſit ut A G, ad A H, ita A H, A O, & ita A O ad A M, erit pariter ut A G, ad A H: ita intervallum G H, ad H O, & ita intervallum H O, ad O M, &c. Parallelogrammum autem ſub E G, in G H, erit ad parallelogrammum ſub H I, in H O, ut parallelogrammum ſub H I, in H O, ad parallelogrammum ſub N O, in O M, cùm enim ratio parallelogralemi ſub G E, in G H, ad parallogrammum ſub H I, in H O, componatur ex ratione rectæ G E, ad rectam H I, & ex ratione rectæ G H, ad rectam H O: ſit autem ut G H, ad H O, ita A G, ad A H, ut præmonuimus. Ergo ratio parallelogrammi ſub E G, & G H, ad parallelogrammum ſub H I, in H O, componitur ex ratione G E, ad H I, & ex ratione A G, ad A H, ſed ut G E, ad H I, ita ex conſtructione H A, quadratum, ad quadratum G A, ſive propter proportionales: ita recta A O, ad rectam G A. Ergo ratio parallelogrammi ſub E G, in G H, ad parallelogrammum ſub H I, in H O, componitur ex ratione A O, ad A G, & A G, ad A H, ſed ratio A O ad A H, componitur ex illis duabus. Ergo parallelogrammum ſub G E, in G H, eſt ad parallelogrammum ſub H I, in H O, ut O A, ad H A; ſive ut H A, ad A G.

Similiter probabitur parallelogrammum ſub H I, in H O, eſſe ad parallelogrammum ſub O N, in O M, ut A O, ad H A, ſed tres rectæ quæ conſtituunt rationes parallelogrammorum, rectæ nempe A O, H A. G A, ſunt proportionales ex conſtructione.

Ergo parallelogramma in infinitum sumpta sub G E, in G H, sub H I, in H O, sub O N, in O M, &c. erunt semper continuè proportionalia in ratione rectæ H A, ad G A. Est igitur ex theoremate hujus methodi constitutivo ut G H, differentia terminorum rationis ad minorem terminum G A, ita primus parallelogrammorum progressionis terminus, hoc est parallelogrammum sub E G, in G H, ad reliquos in infinitum parallelogrammos, hoc est ex adæquatione Archimedæa ad figuram sub H I, asymptoto H R, & curvâ in I N D, in infinitum extendendâ contentam. Sed ut H G, ad G A, ita sumptâ communi latitudine recta G E, parallelogrammum sub G E, in G H, ad parallelogrammum sub G E in G A. Est igitur ut parallelogrammum sub G E, in G H, ad figuram illam infinitam, cujus basis H I, ita idem parallelogrammum sub G E, in G H, ad parallelogrammum sub G E, in G A, ergo parallelogrammum sub G E, in G A, quod est spatium rectilineum datum, adæquatur figuræ prædictæ. Cui si addas parallelogrammum sub G E, in G H, quod propter minutissimos τμημάτων evanescit & abit in nihilum, superest verissimum, & Archimedæâ licet prolixiore demonstratione facillimè firmandum, parallelogrammum A E, in hac hyperbolæ specie, æquari figuræ sub base G E, asymptoto G R, & curvâ E D, in infinitum producendâ contentæ. Nec operosum ad omnes omnino hujusmodi hyperbolas, unâ, ut diximus, demptâ, inventionem extendere.

Sit enim ea alterius, si placet, hyperbolæ proprietas, ut sit G E, ad H I, ut cubus rectæ H A, ad cubum rectæ G A, & sic de reliquis. Expositâ ex more infinitâ proportionalium, ut supra serie fient proportionalia parallelogramma E H, I O, M N, ut suprà in infinitum. In hoc verò casu parallelogrammum primum erit ad secundum, secundum ad tertium, &c. ut recta A O, ad G A, quod statim compositio proportionum manifestabit. Erit igitur ut parallelogrammum E H, ad figuram, ita recta O G, ad G A, & sumptâ communi latitudine G E, ita parallelogrammum sub O G, in G E, ad parallelogrammum sub G E, in G A, est igitur ut parallelogrammum sub O G, in G E, ad parallelogrammum sub G E, in G H, ita parallelogrammum sub G E, in G E, ad parallelogrammum sub G E, in G H, ita parallelogrammum sub G E, in G H, ad figuram & vicissim ut parallelogrammum sub O G, in G E, ad parallelogrammum sub G E, in G H, ita parallelogrammum sub G E, in G A, ad figuram. Ut autem parallelogrammum sub O G, in G E, ad parallelogrammum sub H G, in G E; ita O G, ad G H, sive 2. ad 1. ea adæquatione, intervalla enim basi proxima facta sunt ex constructione ferè æqualia. Inter se ergo in hac hyperbola parallelogrammum E G A, quod est æquale spatio rectilineo dato, est duplum figuræ sub base G E, asymptoto G R, curva E S D, in infinitum producenda contentæ.

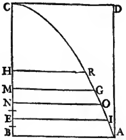
Similis in quibuslibet aliis casibus habebit locum demonstratio, nisi quod in primaria, sive Apolloniana & simplici hyperbola deficit eâ solâ ratione methodus; quia in hac parallelogramma E H, I O, N M, sunt semper inter se æqualia; atque ideo cum termini progressionis constitutivi, sint inter se æquales, nulla inter eos est differentia, quæ totum in hoc negotio conficit mysterium.

Demonstrationem quâ probatur spatia in hyperbola communi parallelogrammis contenta, esse semper inter se æqualia, non adjungimus, cùm statim per se ipsa se prodat; & ex hac unica proprietate quæ asserit in ea specie esse ut G E, ad H I, ita H A, ad G A, facillimè derivetur.

Eadem ratione parabolæ omnes omnino quadrantur, nec est ulla quæ ab artificio nostræ methodi, ut sit in hyperbolis, possit esse immunis.

Unicum in parabola, si lubet, primariâ & Apollonianâ adjiciemus exemplum, cujus exemplo reliquæ omnes in quibuslibet in infinitum parabolis demonstrationes expedientur.

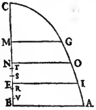
Sit ſemiparabole primaria A G R E, cujus diameter C B, ſemibaſis A B, ſumptis autem applicatis I E, O N, G M, &c. ſit ſemper ut quadratum A B, ad quadratum



I E, ita recta B C, ad C E, & ut quadratum I E, ad quadratum O N, ita recta E C, ad C N, & ſic in infinitum ex proprietate ſpecificæ paraboles Apollonianæ. Intelligantur ex more methodi rectæ B C, E C, N C, M C, H C, &c. in infinitum continuè proportionales. Erunt etiam, ut ſuperius probatum eſt, proportionalia parallelogramma, A E, I N, O M, G H, &c. in infinitum. Ut cognoſcatur ratio parallelogrammi A E, ad parallelogrammum I N, recurrendum ex methodo ad compoſitionem proportionum, componitur autem ratio parallelogrammi A E, ad parallelogrammum I N, ex ratione A B, ad I E, & ex ratione B E, ad E N. Cum autem ſit ut A B, quadratum, ad I E, quadratum, ita B C, ad C E, ſi inter B C, & C E ſumatur media proportionalis C V, item inter E C, & N C, media proportionalis Y C, erunt continuè proportionales rectæ B C, V C, E C, Y C, N C, & ut B C, ad E C, ita erit B C, quadratum ad V C, quadratum, ſed ut B C, ad E C; ita quadratum A B, ad quadratum E I, Ergo ut A B, quadratum ad E I, quadratum, ita erit B C, quadrarum ad V C, quadratum: & ut A B, ad I E, ita erit B C, ad V C, ratio igitur parallelogrammi A E, ad parallelogrammum I N, componetur ex ratione B C, ad V C, ſive V C, ad C E, ſive E C ad Y C; & ex ratione B E, ad E V, ſive ex ſuperius demonſtratis B C, ad C E, Ratio autem quæ componitur ex his duabus rationibus, B C, nempe ad C E, & C E, ad C Y, eſt eadem quæ ratio B C, ad C Y, igitur parallelogrammum A E, eſt ad parallelogrammum I N, ut B C, ad Y C, ideoque ex theoremate methodi conſtitutivo, parallelogrammum A E, erit ad figuram I R C H E, ut recta B Y, ad rectam B C, ideoque ut idem parallelogrammum A E, ad totam figuram A I G R C B, ita recta B Y, ad totam diametrum B C, ut autem recta B Y, ad totam diametrum B C, ita ſumptâ communi latitudine A B, parallelogrammum ſub A B in B Y, ad parallelogrammum ſub A B, in B C, ſive parallelogrammum B D, ductâ A D, diametro parallelâ occurrente tangenti C D, in D, ergo ut parallelogrammum A E, ad totam figuram ſemiparabolicam A R C B; ita parallelogrammum ſub A B, in B Y, ad parallelogrammum B D, & viciſſim ut parallelogrammum A E, ad parallelogrammum ſub A B, in B Y; ita figura ad parallelogrammum B D, ut autem parallelogrammum A E, ad parallelogrammum ſub A B, in B Y, ita propter communem latitudinem recta B E, ad B Y, ergo ut B E, ad B Y, ita figura ad parallelogrammum; & convertendo ut B Y, ad B E, ita parallelogrammum B D, ad figuram A R O B; eſt autem B Y, ad B E, propter adæqualitatem & ſectiones minutiſſimas, quæ rectas B V, V E, E Y, intervalla proportionalium repræſentates, ferè inter ſe ſupponit æquales, ut 3. ad

2. Ergoparallelogrammum B D,ad figuram eſt ut 3. ad 2. quæ ratio congruit τετραγωνισμῷ paraboles Archimedæo, licet ab eo geometrica proportio aliâ ratione fuerit uſurpata; Methodum autem variare, & diverſam ab Archimede viam ſectari neceſſum habuimus, quia ſterilem proportionis geometricæ ad quadrandas cæteras in infinitum parabolas applicationem deprehenſam iri, inſiſtendo veſtigiis tanti viri non dubitamus. Demonſtratio autem & regulæ generales ex noſtra methodo ferè in omnibus omnino parabolis ſtatim patebunt.

Sit enim, ut nullus ampliùs ſuperſit dubitandi locus parabole ea de qua mentionem fecit diſſertatio noſtra de linearum curvarum cum lineis rectis comparatione, curva



A I C B, cujus baſis A B, diameter B C, & ſit ut cubus applicatæ A B, ad cubum applicatæ I E, ita quadratum rectæ B C, ad quadratum rectæ E C, & reliqua ponantur ut ſupra; ſeries nempe proportionalium rectarum B C, E C, N C, M C, &c. item ſeries proportionalium parallelogrammorum A E, I N, O M, &c. in infinitum. Inter B C, & E C, ſumantur duæ mediæ proportionales V C, R C, item inter E C, & C N, ſumantur etiam duæ mediæ proportionales S C, T C, conſtat ex conſtructione, cum ratio B C, ad E C, ſit eadem rationi E C, ad N C, fore quoque continuè proportionales rectas B C, V C, R C, E C S C, T C, N C. Eſt autem ut A B, cubus ad cubum I E, ita B C, quadratum ad E C, quadratum, ſive recta B C, ad rectam N C. Cum autem ſint, ut ſupra probavimus, ſeptem continuè proportionales, B C, V C, R C, E C, S C, T C, N C, ergo prima, tertia, quinta & ſeptima erunt etiam continuè proportionales, ideoque erit B C, ad R C, ut R C ad S C, & ut S C, ad N C. Ut igitur prima B C, ad quartam N C, ita cubus primæ B C, ad cubum ſecundæ R C, ſed ut B C, ad N C, ita probavimus eſſe cubum A B, ad cubum I E. Ergo ut cubus A B, ad cubum I E, ita cubus B C, ad cubum R C; ideoque ut A B, ad I E, ita B C, ad R C. Cum igitur ratio parallelogrammi A E, ad parallelogrammum I N, componatur ex ratione A B, ad I E, & ex ratione B E, ad E N, ſive B C, ad E C, ergo eadem parallelogrammorum ratio componetur ex ratione B C, ad R C, & B C, ad E C. Ut autem B C, prima proportionalium ad E C, quartam, ita R C, tertia ad T C, ſextam. Ergo parallelogrammi A E, ad parallelogrammum I N, ratio componitur ex ratione B C, ad R C, & R C, ad T C: hoc eſt parallelogrammum A E, eſt ad parallelogrammum I N, ut B C, ad T C, parallelogrammum igitur A E, ex prædemonſtratis, eſt ad figuram I G C E, ut recta B T, ad T C; ideoque ut parallelogrammum A E, ad totam figuram A I C B, ita recta B T, ad rectam B C, ſive ſumpta communi latitudine A B, ita parallelogrammum ſub A B, in B T, ad parallelogrammum ſub A B, in B C. Et viciſſim & convertendo, ut parallelogrammum B D, eſt ad figuram A I C B, ut parallelogrammum ſub A B, in B T, ad parallelogrammum ſub A B, in B E, ſive propter communem latitudinem A B, ut recta B T, ad rectam B E, recta autem B T, continet quinque intervalla T S, S E, E R, R V, V B, quæ inter ſe propter noſtram methodum logarithmicam cenſentur æqualia. Recta autem B E, continet tria ex iis intervallis,

nempe

nempe ER, RV, V B. Ergo paralellogrammum BD, est ad totam figuram in hoc casu ut 5. ad 3.

Canon verò universalis inde nullo negorio elicietur. Patet nempe fore semper parallelogrammum B D. ad figuram AICB, ut aggregatum exponentium potestatum applicatæ & Diametri ad exponentem potestatis applicatæ, ut in hoc exemplo videre est, in quo potestas applicatæ AB, est cubus, cujus exponens B. potestas autem diametri est quadratum, cujus exponens 3. Ergo debet esse, ut jam demonstravimus, & perpetuò constabit, ut summa 3. & 2. hoc est 5. ad 3. exponentem applicatæ.

In hyperbolis autem canon non minori facilitate invenietur universalis. Erit enim semper in quacunque hyperbola, si recurras ad primam figuram, parallelogrammum BG, ad figuram in infinitum protensam, RGED, ut differentia exponentium potestatum applicatæ & diametri ad exponentem potestatis applicatæ. Sit enim, exempli gratiâ, ut cubus HA ad cubum G A, ita quadratum. G E, ad quadratum H I. differentia exponentium cubi & quadrati hæc est. 3. & 2. erit 1. Exponens autem quantitatis applicatæ, hoc est quadrati, est 2. Ergo in hoc casu parallelogrammum erit ad figuram, ut 1. ad 2.

Quod attinet ad centra gravitatis, & tangentes, tam hyperbolarum, quàm parabolarum, inventio dudùm ex nostra methodo de maximis & minimis derivata, Geometris recentioribus innotuit, hoc est ante viginti, plus minus annos. Quod celebriores totius Galliæ Mathematici non gravabuntur fortasse exteris indicare, ne hac de re in posterum dubitent.

Ex supradictis mirum, quantam opus tetragonismicum consequatur accessionem. Infinitæ enim exinde figuræ curvis contentæ de quibus nihil adhuc, nec veteribus, nec novis Geometris in mentem venit, facillimam sortiuntur quadraturam. Quod in quasdam regulas breviter contrahemus.

Sit curva, cujus proprietas det æquationem sequentem B, quad. — A, quad. æquale E, quad. (apparet autem statim hanc curvam esse circulum.) Certum est potestatem ignoram E, quad. posse reduci per applicationem seu parabolismum ad latus. Possumus enim supponere E, quad. æquari B, in V, cùm sit liberum quantitatem ignoram V, in notam B, ductam æquare quadrato E, etiam ignotæ. Hoc posito B, quad. A, — quad. æquabitur B, in V. Homogeneum autem B in V, ex tot quantitatibus homogeneis componi potest, quot sunt in parte æquationis correlativâ, iisdemque signis hujusmodi homogenea debent notari. Supponatur igitur B in V, æquari B in I B, in Y. Ex more enim Vietæo, vocales semper pro quantitatibus ignotis sumimus. Ergo B, quad. — A, quad. æquatur B in I, — B in Y, æquentur singula membra partis unius singulis membris partis alterius Sit nempe B, quad. æquale B, in I, Ergò dabitur I, æqualis B, æquetur deinde — AG, — B, in Y, hoc est A quad. B in Y, erit extremum punctum rectæ Y ad parabolen primariam. Omnia igitur in hoc casu ad quadratum reduci possunt: ideoque si omnia E, quad. ad rectam lineam datam applices, fiet solidum rectilineum datum & cognitum.

Proponatur deinde curva, cujus, hæc sit æquatio A cub. + B, in A, quad. æquale E, cub. E, cub. applicetur ad planum datum, & sit, verbi gratiâ, æquale B, quad. in V. Quia autem recta V, ex pluribus quantitatibus ignotis componi potest. Sit A, cub. + B in A, quad. æquale B, quad. in I + B quad. in Y. æquentur singula inter se membra, hoc est A cub. æquetur B. quad. in I, orietur inde parabole sub cubo & latere. æquetur deinde B in A, quad. secundo membro, B, quad. In Y, orietur inde parabole sub quad. & latere, hoc est primaria, quadrantur autem singulæ ex his parabolis. Ergo aggregatum E, cuborum ad rectam datam applicatorum producit plano-planum quantitatibus ejusdem gradus rectilineis commodè æquandum.

Si sint plura in æquationibus membra, imò & sub plerisque utriusque quantitatis ignotæ gradibus involuta, ad eamdem ut plurimum methodum reductionum legitimarum ope poterunt aptari.

Ex his patet, si in priori æquatione in qua B, quad. — A quad. æquavimus E, quad

loco ipsius E, quad. ponamus B in V, posse nos aggregatum omnium V, ad rectam datam applicatarum considerare tanquam planum, & quadrare. Omnes enim V, nihil aliud sunt quàm omnia E quad. divisa per B rectam datam. Item in secunda æquatione omnes V, nihil aliud sunt quàm omnes E cubi divisi per B, quadratum datum. Igitur tam in prima quàm in secunda figura omnes V, faciunt figuram æqualem spatio rectilineo dato.

Hoc autem opus fit per synæresim, & expeditur, ut patet, per parabolas.

Sed non minus quadrationum ferax est opus per diæresim quod per hyperbolas, aut solas, aut parabolis mixtas, commodè pariter expeditur.

Proponatur, si placet, curva ab æquatione sequenti oriunda.

$$\frac{\text{B, cub. cub.} + \text{B QC in A,} + \text{A cub. cub.}}{\text{A quad. quadr.}} \infty \text{ E quad.}$$

Ex jam suppositis E quad. potest fingi æquale B in V, sive ut tria hinc & inde membra sint in utraque parte æquationis. B in V, potest æquari B in O, + B in I, + B in Y Quo peracto.

$$\frac{\text{B cub. cub.} + \text{B QV cub. in A} + \text{A cub. cub.}}{\text{A quad. quadr.}} \text{ æquabitur.}$$

B in O. + B in I + B in Y. Et æquando singula membra singulis $\frac{\text{B cub. cub.}}{\text{A Q Q.}}$ æquabitur B in O.

Et omnibus in A, qu. qu. ductis B, cub. cub. æquabitur A qu. qu. in B in O. Et omnibus abs B divisis B. quad. cub. æquabitur A qu. qua. in O. quæ est æquatio ad unam ex hyperbolis, ut patet. Æquationes enim hyperbolarum constitutivæ continent ex una parte quantitatem datam; ex aliâ verò id quod fit sub potestatibus duarum quantitatum ignotarum.

Secundum membrum æquationis dat $\frac{\text{B QC in A.}}{\text{A qu. qu.}}$ Sive $\frac{\text{B, qu. cub.}}{\text{A cub.}}$ æquale B in I.

Et omnibus in A cub. ductis & abs B divisis, fit B qu. qu. æquale A cub, in I, quæ est æquatio alterius hyperbolæ à priore diversæ. Denique tertium membrum est $\frac{\text{A cub. cub.}}{\text{A qua. qua.}}$

Hoc est A, qu. æquale B, in Y, quæ est æquatio ad parabolen.

Patet itaque in præcedente æquatione omnes V, ad rectam datam applicatas æquari spatio rectilineo dato. Summa enim duarum hyperbolarum quadrationi obnoxiarum, & unius parabolæ dant spatium æquale rectilineo vel quadrato dato.

Nihil autem vetat quominus singula membra numeratoris separatim denominatori applicemus,, ut jam factum est. Eodem enim res recidit, quò si integrum numeratorem ex tribus membris compositum eidem denominatori semel applicemus. Ita enim singula æquationis membra singulis homogenei correlatis possunt commodè comparari.

Proponatur etiam $\frac{\text{B, qu. cub. in A,} - \text{B, cub. cub.}}{\text{A cub.}}$ Æquari E cub.

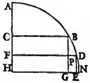
Fingatur E cub. æquari B, qu. in V, sive propter duo membra homogenei correlati B, qua. in I, + B, qu. in Y. Fiet $\frac{\text{B qu. cub. in A,}}{\text{A cub.}}$ sive $\frac{\text{B qu. cu.}}{\text{A Q.}}$ æquale B qu. in I.

& omnibus in A qu. ductis, & abs B, qu. divisis, fiet B, cub. æquale A, qu. in I. quæ est æquatio ad unam de hyperbolis quadrandis.

Ponatur deinde secundam homogenei membrum B, cub æquari $\frac{\text{B qu. in Y.}}{\text{Acub.}}$

Igitur omnibus in A, cub. ductis & abs, B, qu. divisis fiet B, qu. qu. æquale A, cub. in Y, quæ est æquatio unius ex hyperbolis quadrationi obnoxiis constitutiva. Datur igitur recurrendo ad primam æquationem in rectilineis summa omnium E, cuborum in hac specie ad certam rectam datam applicatorum.

Sed & ulteriùs progredi, & opus tetragonismicum promovere nihil vetat.



Sit in quartâ figurâ curva quælibet, A B D N, cujus basis H N, diameter H A, applicatæ ad diametrum, C B, F D, & applicatæ ad basim, B G, D E, & decrescant semper applicatæ à base ad verticem, ut hic, H N, est major F D, & F D, major est C B, & sic semper. Figura composita ex quadratis H N, F D, C B, ad rectam A H, applicatis, hoc est solidum sub C B, quadrato in C A, & sub F D, quadrato in F C, & sub N H, quadrato in H F, æqualis est semper figuræ sub rectangulis B G, in G H, D E, in E H, bis sumptis, & ad basim H N, applicatis; hoc est solido sub B G, in G H, bis in G H, & sub D E, in E H, bis in E G, &c. utrimque in infinitum. In reliquis autem in infinitum præstantibus, eadem facilitate fit reductio homogeneorum ad diametrum, ad homogenea ad basim. Quæ observatio curvarum infinitarum hactenus ignoratum, detegit quadrationem.

Omnes enim cubi H N, F D, C B, ad rectam A H, similiter applicati, æquales sunt aggregato productorum ex B G, in G H, quadratum, & ex D E, in E H, quadratum ad rectam H N, similiter ut supra applicatorum, & ter sumptorum; hoc est planoplanum sub C B, cubo in C A, & sub D F, cubo in F G, & sub H N, cubo in H F, æquatur summæ planoplanorum ex B G, in G H, quadratum in H G, & ex D E, in E H, quadratum in E G, ter sumptæ.

Aggregatum verò quadrato quadratorum H N, F D, C B, ad rectam A H, applicatorum æquatur quadruplo summæ plano planorum sub B G, in G H, cubum, & sub D E, in E H, cubum ad rectam H N, similiter ut supra applicatorum.

Inde emanant infinitæ, ut statum patebit, quadraturæ.

Esto enim, si placet, curva illa A B D N, ejus naturæ, ut data base H N, & diametro H A, diameter data A H, vocetur in terminis analyticis B. Ipsa verò H N, basis data vocetur D. Quælibet applicato F D, vocetur E, & quælibet H F, vocetur A; & sit, verbi gratiâ, æquatio curvæ constitutiva B, quad. – A qu. æquale E, quad. (quod in circulo ita se habet:) Cùm ergo ex prædicto theoremate universali omnia E, quadrata, ad rectam B, applicata ad basim H N, sive ad D, applicatis, sint æqualia omnibus productis ex H G, in G B, sint autem omnia E, quadrata æqualia ad B, applicata spatio rectilineo curvo, ut superiùs probatum est. Ergo omnia producta ex H G, in G B, bis sumpta, & ad basim D, applicata, continent spatium rectilineum datum. Ergo sumendo dimidium, omnia producta ex H G, in G B, ad basim D, applicata,

erunt æqualia ſpatio rectilineo dato. Ut autem facillima, & nullis aſymmetriis involuta fiat tranſlatio prioris curvæ ad novam ; ita conſtanti artificio, quæ eſt noſtra methodus, operari debemus.

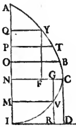
Sit quodlibet ex productis ad baſim applicandis, H E, in E D, cum igitur F D, ſive H E, ipſi parallela vocetur in analyſi E, & F H, ſivè D E, ipſi parallela vocetur A. Ergo productum ſub H E, in E D, vocabitur E in A. Ponatur illud productum E in A, quod ſub duabus ignotis & indefinitis rectis comprehenditur æquari B in V, ſivè producto ex B, data in V, ignotam, & intelligatur E P, in directum ipſi D E, poſita æquari V, Ergo $\frac{\text{B in V},}{\text{E}}$ æquabitur A. Cum ergò B, qu. – A, quad. æquetur ex proprietate ſpecifica prioris curvæ ipſi E, qu. Ergo ſubrogando in locum A, ipſius novum valorem $\frac{\text{B, in V},}{\text{E}}$ fier B, quad. in E, qu. – B, quad. in V, quad. æquale E, quad. quad. ſive per antitheſim B, quad. in E, qu. – E, qu. qu. æquale B, qu. in V, quad. quæ eſt æquatio novæ H O P N, curvæ ex priori oriundæ conſtitutiva, in qua cum omnia producta ex B, in V, dentur, ut jam probatum eſt, ſi omnia ad B, applicentur dabitur ſumma omnium V, ad baſim applicatarum. hoc eſt dabitur planum H O P N, rectilineis ; ideoque ipſius quadratura.

Sit, ſecundi exempli gratiá, æquatio prioris curvæ conſtitutiva B, in A, quad. – A cub. æquale E, cub. ſumma omnium E, cuborum ad diametrum B, applicatorum dabitur : ideoque ſumma omnium productorum ex quadratis H E, in E D, ad baſim applicatorum. Productum autem ex H E, quadrato in E D, ſit in terminis analyticis E, quad, in A, quod fingatur æquari B, quad. in V, & recta. E P, ut ſupra, æqualis V, Ergò $\frac{\text{B, quad. in V},}{\text{E quad.}}$ æquabitur A.

Si igitur in locum A, ſubrogemus jam agnitum illins valorem $\frac{\text{B, quad. in V.}}{\text{E quad.}}$

Et omnia juxta analyſeos præcepta ſequamur, fiet B, quad. cub. in V. quad. in E. quad. – E, cub. cub. cub æquale B, cub. cub. in V, cub. quæ eſt æquatio novæ H O P N, curvæ ex priore oriundæ conſtirurlva, in quâ cùm omnia producta B, qu. in V, ad baſim D, applicata dentur, omnibus per B, quadratum datum diviſis, dabitur ſumma omnium V, ad baſim D, applicatarum ideoque quadratura figuræ H O P N, & eſt generalis ad omnes omnino caſus extendenda in infinitum methodus.

Notandum porro, & accuratè advertendum in tranſlationibus curvarum, quarum applicatæ ad diametrum verſus baſim decreſcunt, aliam omnino viam analyſtis incundam, à præcedenti diverſam.



Sit enim in quinta figura prior curva I V C B T Y A, cujus diameter A I, applicatæ M V, N C, O B, P T, Q Y, & ejus curvæ ea sit natura, ut applicatæ versus basim M V, semper decrescant, donec ad basim perveniant, ita ut M V, sit minor quàm N C. Rursus autem ita curva versus A, per tramitem C B Y A, inflectatur, ut C N, sit major quam B O, B O, major quàm P T, P T, major quàm Q Y, &c. ita ut omnium applicatarum maxima sit C N, si in hoc casu quæramus translationem quadratorum M V, N C, ad basim, ea non comparabimus productis sub I R, in R V, ut supra: quia jam ex theoremate generali suppositum est omnia quadrata M V, N C, æquati productis sub V G, in G N, cum C N, maxima applicatarum possit & debeat considerari ut basis respectu curvæ, cujus vertex I Quadrata igitur M N, N C, in curva quarum applicatæ decrescunt versus basim, comparabuntur in hoc casu productis G V, in G N, hoc est, ut ad terminos analyticos æquatio in hac figura perveniat, si M I, vel R V, vocetur A, & ipsa M V, sive R I, vocetur E, ipsaque C D, sive G R, quæ ductæ per terminum maximæ applicatarum, ipsi diametro parallelæ, est æqualis: ideoque facilè ex nostris methodis invenienda; rectæ datæ Z, æqualis supponatur, fiet productum ex G V, in G N, æquale producto ex Z, in E, — A in E: ideoque omnia quadrata M V, N C, usque ad maximam applicatam comparabuntur productis Z, in E — A in E, ad basim I D, applicandis. Reliqua verò quadrata C N, B O, P T, comparabuntur productis ex Y F, in F N, quæ in terminis analyticis æquivalebunt A in E, — Z in E. Quibus ita stabilitis facillimè ex priore curva nova versus basin derivabitur; idemque in aliis omnino applicatarum potestatibus erit observandum.

Ut autem pateat novas ex nostra hac methodo emergere quadraturas, de quibus nondum recentiorum quisquam est aliquid subodoratus.

Proponatur præcedens curva, cujus æquatio $\frac{B,\ \text{quad. cub. in } A - B,\ \text{cub. cub}}{A\ \text{cub.}}$ æquale E, cubo.

Dantur omnes E, cubi in rectilineis, ut jam probatum est. Quibus ad basim translatis, fiet ex superiori methodo $\frac{B,\ \text{qu. in } V}{E\ \text{qu.}}$, æquale A, & omnibus secundum artem novo ipsius A, valore accommodatis, evadet tandem nova æquatio quæ dabit curvam ex parte basis, cujus æquatio dabit E, cub. + V, cub. æquale B in E, in V, quæ est curva Schotenii, cujus constructionem tradit in sectione 25. miscellanearum, pag. 493. Figura itaque curva A K O G D C H, quæ apud illum authorem delineatur ex superioribus præceptis quadrationem suam commodè nanciscetur.

Notandum autem de curvis in quibus aggregatum potestatum applicatarum datur, formari non solum curvas ad basim quadrationi obnoxias, sed etiam alias curvas ad diametrum facilè quadrandas. Si enim in 4. figura supponatur æquatio curvæ constitutiva, ut superiùs diximus B, quad. — A, qu. æquale E, quad. non solum ex ea derivabitur nova curva ad basim, cujus æquatio est B, qu. in E, qu. — E qu. quad. æquale B, qu. in V, quad. Sed etiam nova curva ad diametrum æquando potestatem applicatæ quæ est E, qu. producto B, in V. Dabuntur enim omnia producta B, in V, ad diametrum applicata. Et omnibus per B, divisis, dabuntur omnes V, diametro applicatæ; ideoque quadraturæ curvæ novæ ex priori versùs diametrum oriundæ, cujus æquatio erit B, qu. — A qu. æquale B in V. Unde statim apparet novam illam curvam versùs diametrum esse parabolen. Hujusmodi autem transmutationum beneficio non solum ex prioribus curvis oriuntur novæ; sed itur nullo negotio a parabolis ad hyperbolas, & ab hyperbolis ad parabolas, ut experientiâ constabit.

Sicut autem à curvis in quibus dantur potestates applicatarum, fit præcedentis ope analyseos translatio ad curvas, in quibus latera applicatarum in rectilineis dantur; Ita de curvis in quibus dantur latera applicatarum, devenitur facilè ad curvas, in quibus potestates applicatarum dantur. Cujus rei exemplum esto curva, cujus æquatio B, qui

in E, qu. – E, qu. qu. æquale B, qu. in V, qu. in hac enim æquatione, ut jam probatum est, dantur omnes V, Ponatur V, æqualis esse $\frac{\text{A, in E}}{\text{B}}$, & subrogando in locum ipsius V, novum ipsi assignatum valorem, $\frac{\text{A in E}}{\text{B}}$, fiet B, qu. in E, qu. – E, quad. quad. æquale A qu. in E, qu. & omnibus ab E, qu. divisis, remanebit B, qu. – E, qu. æquale A, qu. sive B, qu. – A, qu. æquale E, qu. Dabuntur igitur in hac novâ curvâ, quam apparet esse circulum, omnia E, quadrata.

Quod si ex primâ curvâ in quâ dantur latera applicatarum, quæratur nova in quâ dentur cubi applicatarum, eadem methodo utendum, modò potestates ignotarum conditionarias usurpemus. Proponatur enim curva quam superiùs ex alia deduximus, & sit illius æquatio B, qu. cub. in V, quad. in E, qu. – E, cub. cub. cub. æquale B, cub. cub. in V, cub.

Probatum est in illa dari aggregatum omnium V, hoc est latera applicatarum.

Ut itaque ex eâ nova curva derivetur in qua omnes cubi applicatarum dentur, ponatur V, æquari $\frac{\text{E, qu. in A,}}{\text{B qu.}}$ & in locum V, substituatur novus iste quem ipsi assignavimus valor, fiet tandem operando secundùm præcepta artis, æquatio in B, in A, qu. – A cub. & E, cub. quæ dabit curvam in qua omnes E, cub. cubos applicatarum repræsentantes dabuntur.

Ex hac autem methodo non solùm dantur & inveniuntur quadrationes infinitæ, nondum Geometris cognitæ, sed multæ etiam pariter infinitæ deteguntur curvæ, quarum quadraturæ supponendo simpliciores quadraturas, ut circuli, ut hyperbolæ, ut aliarum expediuntur. Exempli gratiâ, in æquatione circuli, in qua B, qu. – A, qu. æquatur E, qu. dantur quidem in rectilineis omnes applicatarum potestates, quarum exponentes signantur numero pari, ut omnia quadrata, omnia quadrato quadrata, omnes cubo cubi, &c. Sed potestates applicatarum, quarum exponentes signantur numero impari, ut omnes E, cubi, omnes E, quad. cubi, dantur tantùm in rectilineis supponendo ipsam circuli quadraturam, quod non est operosum demonstrare, & in praxim redigere, tam quam corollarium methodi precedentes.

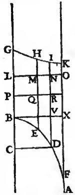
Plerumque autem usuvenit ut iterandæ, vel bis, vel etiam sæpius sint operationes ad inquirendam curæ propositæ dimensionem.

Proponatur, exempli gratiâ, curva, ejus æquatio sequens speciem determinet B, cub. æqualis A, quad. in E, + B, qua in E.

Si dantur omnes E, ergo dantur omnia sub rectâ datâ, (B, videlicet) in E, rectangula Rectangulum B, in E, invertendo superiorem, de qua egimus in principio dissertationis methodum, æquetur quadrato O, qu. Ergo $\frac{\text{O, quad.}}{\text{B}}$ æquabitur E. Et substituendo in locum E, novum hunc ipsi assignatum valorem, fiet B, qu. qu. æquale A, Qu. in O, qu. + B, qu. in O, qu. Et hæc sit prima operatio, quæ est inversa ejus quam initio hujus dissertationis præmisimus, & quæ novam curvam exprimit, in quâ inquirendum restat an dentur omnia O, quad. Recurrendum igitur ad secundam methodum, cujus beneficio ex quadratis applicatarum latera novæ curvæ inquirimus.

Ponatur $\frac{\text{B, in V}}{\text{O}}$, ex superiore quam secundo loco exhibuimus methodo æquari A, & substituendo in locum A, ipsi jam assignatum ex nostra methodo valorem fiet B, q, qu – B, qu. in O, qu. æquale B, qu. in V, quad. Et omnibus per B, quad. divisis evadet tandem B, qu. – O, qu. æquale A, quad. quæ æquatio dat circulum. Et in eâ omnes V, dantur, supponendo quadraturam circuli. Recurrendo igitur ad priorem curvam, in quâ B, cub. ponitur æquari A, qu. in E, + B, qu. in E, patet spatium ab ea curva oriundum per quadtaturam circuli posse quadrari, id quæ per duas curvas à priore diversas analysis nostra breviter & facilè expedivit.

Hæc verò omnia, & ad inventionem rectarum curvis æqualium, & ad pleraque alia non satis hactenus indagata problemata inservire statim experiendo ἀγχίνυς analysta deprehendet.



Sit in sextâ figura parabole primaria A, B, C, cujus axis C B, applicata C D, æqualis axi C B, & recto lateri B V, fiantque B P, P L, L G, singulæ æquales axi C B, & ipsi sic directum sumatur in curva quodvis punctum, ut F, & datis infinitis B X, P S, L O, ipsi C D, parallelis, ducatur F X S O K, parallela axi occurrens rectis P S, L O, in punctis S, & O, & fiat ut summa rectarum F X, X S, sivè ut tota F S, ad S O, ita S O, ad O K. Et sumptis similiter punctis D E, fiat ut D R, ad R N, ita R N, ad N I, & ut E Q, ad Q M, ita Q M, ad M H. Et intelligatur curva infinita per puncta G H I K, &c. incedens, cujus asymptotos erit recta infinita L O. Curva hæc G H I K est ea cujus species à superiori æquatione determinatur, in qua B, cub. æquatur A, qu. in E, + B, quad. in E, Aio itaque ex jam traditâ operationum analytica iteratione, spatium K I H G L M N O, in infinitum versùs puncta K O, extendendum, æquale esse circulo, cujus diameter est axis B C, Hanc verò quæstionem ab erudito Geometra nobis propositam, ita statim expedivimus.

Eâdem methodo spatium à Dioclæa comprehensum quadravimus, vel ad circuli quadraturam reduximus.

Sed elegans inprimis operationum iteratio evadit, cum ab altioribus applicatarum potestatibus, ad depressiores, vel contra à depressioribus ad altiores analysis ipsa transcurrit; cui methodo præsertim debeatur inquisitio summæ applicatarum in quacumque curva proposita, & multa alia problemata tetragonismica. Proponatur, verbi gratiâ, curva, cujus æquatio B, qu. — A, qu. æquale E, qu. quam statim apparet esse circulum. Quæritur summa cuborum applicatarum, hoc est summa E, cuborum. Si dantur omnes E, cubi. Ergo per præcedentes, secundùm potestatis conditionem, methodos, ex ea curva potest alia ad basim derivari, in quâ dabitur summa applicatarum. Ponatur igitur ex methodo $\frac{B,\ qu.\ in\ O}{E,\ qu.}$, æquari A. Ergo substituendo in locum A, jam assignatum ipsi valorem, fiet ex methodo B, qu. in E, qu. qu. — E, cub.

cub. æquale B, qu. qu. in O, qu. quæ est æquatio curvæ, in qua omues O, dantur ex suppositione quam fecimus in primâ curvâ, dari omnes E, cubos. Cum igitur in hac nova curva omnes O, dentur, ex ea derivetur tertia, in qua quærantur quadrata applicatarum, non verò cubi, ut in priore curvâ jam suppositum est. Fingatur igitur ex nostra quæ in quadratis, ut jam supra diximus, usurpatur methodo $\frac{E,\ in\ V}{B}$, æquari O. Ergo B, qu. in E, qu. qu. — E, cub. cub. æquabitur B, qu. in E, qu. in V, quad. Et omnibus abs E, qu. divisis fiet B, qu. in E, q. — E, qu. qu. æquale B, qu. in V, quad. Et in hac curva omnes E, quadrati dantur. Si igitur ex hac curva quæramus aliam in qua omnes applicatæ dentur, ponatur, si placet, E, quad. æquale B, in Y. Ergo in ultima hac æquatione B, in Y — Y quad. æquabitur V, qu. Et cùm in superiore dentur omnes E, qu. dabuntur in ista omnia rectangula B, in Y, ideoque omnes Y. Cum ergo omnes Y, dentur in hac ultima curva, quæ est circulus ut patet. Igitur eâ tantùm conditione dantur, si supponas dari circuli quadraturam. Regrediendo igitur ab hac ultimâ, in qua desinit nostra analysis, curva, ad priorem, patet omnes applicatarum ad circulum cubos dari, supponendo circuli quadraturam. Idem de quadratocubis, de quadratoquadratocubis, & cæteris in infinitum gradus imparis potestatibus demonstrare est in promptu. Sed multiplicatut numerus curvarum, prout altior est, de quâ inquirimus, potestas. Nec est difficilis ab analysi ad synthesim, & ad verum quadrandæ figuræ calculum regressus.

Sæpiùs autem contingit, & miraculi instar est per plurimas numero curvas incedendum & expatiandum esse analystæ, ut ad simplicem æquationis localis propositæ dimensionem perveniatur.

Proponatur, exempli causâ $\frac{B^7\ in\ A - B^8}{A^6}$ æquari E, qu.

Cùm supponatur dari quadratura figuræ ex hac æquatione oriundæ; dabuntur omnes A. Ergo omnes B, in A, quæ si æques quadrato ignoto O, qu. dabuntur omnes O, qu. & A, æquabitur $\frac{O\,q.}{B}$ ideoque fiet æqu. inter $\frac{B^{12}\ in\ O\ qu. - B^{14}}{O^{12}}$ & E, q. ex hac novâ curvâ, aliâ methodo, de quâ toties egimus, deducetur tertia, in quâ quia dantur omnes O, quadrati, ponatur $\frac{B\ in\ V,}{O}$ æquari E, ergo fiet æquatio inter $\frac{B^{10}\ in\ O\,q - B^{12}}{O^{10}}$ Et V, quadr. unde deducetur quarta curva, in qua dabuntur omnes O, ideoque omnes V. Si dantur omnes V. Ergo ex prima methodo dantur omnia sub B, in V, rectangula, sit B, in V, æquale Y, quadrato: ideoque $\frac{Y\ quad.}{B.}$ æquabitur V, fiet æquatio inter $\frac{B^{12}\ in\ O\ qu. - B^{14}}{O^{10}}$ & Y^4 unde orietur quinta curva in quâ dabuntur omnes Y, quadr. Ex illo solita methodo deducatur alia curva, & fiat $\frac{B\ in\ I,}{Y}$ æqualis O.

Omnibus secundùm præcepta analyseos peractis fiet B^4 in Y^4 in I, quad. — B^4 in Y^6 æquale I^{10} unde orietur sexta curva, in quâ dabuntur omnes I, ideoque omnes I. Ex eâ contrariâ quam jam sæpius inculcavimus methodo quæratur alia curva in qua dentur quadrata applicatarum, & sit $\frac{I\ in\ A,}{B}$ æqualis Y, (nihil enim vetat defectu vocalium, ad priores supra usurpatas recurrere,) fiet B, qu. in $A^4 - A^6$ æquale

le B, qu. in I^4, unde orietur curva feptima, in qua omnia I, quadrata dabuntur. Reducantur ad latera, notâ & fæpius iteratâ fuperiùs methodo, & fiat I, quadratum æquale B, in E. Ergò omnia B, in E, dabuntur Et inde deducetur octava curva, in qua B qu. in $A^4 - A^6$ æquabitur B^4 in E qu. in eâque dabuntur omnes E; ideoque omnes A. Ex ea deducatur alia curva, in qua dentur quadrata applicatarum, & ex methodo ponatur $\frac{A \text{ in } O}{B}$, æquari E. Ergo B. qu. in $A^4 - A^6$ æquabitur B, qu. in A qu. in O qu. Et omnibus abs A qu. divifis, fiet æquatio inter B qu. in A q. $-$ A^4. Et B q. in O q. in qua omnia A, qu. dabuntur, Et erit nona curva ab ea æquatione determinata. Cum igitur in eâ omnia A quadrata dentur, deducatur ex eâ alia tandem curva, in qua dentur latera, & fit A qu. æquale B in V, fiet B in V $-$ V quad. æquale O qu. quæ ultima æqualitas dabit decimam curvam, in qua omnes V dabuntur. At hæc ultima curva, eft circulus, ut patet, & in ea omnes V, non dantur, nifi fuppofitâ circuli quadraturâ. Ergo recurrendo ad primam curuæ propofitæ conftitutionem, dabitur illius quadratura, fupponendo ipfam ultimæ iftius curvæ, five circuli quadraturam. Beneficio igitur decem curvarum inter fe diverfarum ad notitiam prioris pervenimus.

NOVVS SECVNDARVM
ET VLTERIORIS ORDINIS RADICVM
IN ANALYTICIS USUS.

REDUCTIO ſecundarum, & ulterioris ordinis radicum, ad primas, quæ maximi eſt in Algebricis momenti, unicam pro fundamento agnoſcit duplicatæ æqualitatis analogiam, eamque, quoties opus fuerit, iterandam progreſſus ipſe quæſtionis oſtendit.

Proponatur A, cubus + E, cubo æquari Z, ſolido. Item B, in A, + E q. + D, in E, æquari N, quad. ut ſecunda radix devolvatur ad primam. Hæc ſunto præcepta.

Quæcumque à ſecunda radice adficientur homogenea in unam æquationis partem tranſeunto, ut in ſuperiori exemplo, cum A c. + E c. æquetur Z, ſol. Ergò Z, S. − A c. æquabitur E c.

Similiter cum B in A, + E q. + D, in E, æquetur N q. Ergo N q. − B, in A, æquabitur E q. + D, in E.

In utraque igitur æquatione homogenea ab E, ſive ab ſecunda radice adfecta, unam æquationis partem conſtituunt.

Si igitur duplicata ejuſmodi æqualitas ad analogiam revocetur, erit ut

Z, S, − A c. ad E c.

Ita N q. − B, in A, ad E q. + D, in E.

Cum itaque factum ſub extremis comparabitur facto ſub mediis, tanquam ipſi æquale, omnia homogenea diviſionem admittent per E, ſive per ſecundam radicem, ut patet: quia ſecundus & quartus terminus ab E, adficiuntur.

Erit nempe + Z S, in E q, − A c, in E q, + Z S, in D in E, − A c, in D in E, æquale N q, in E c, − B in A, in E c.

Omnia dividantur toties per E, donec aliquod ex homogeneis adfectione ſub E, omnino liberetur.

Erit Z S, in E, − A c, in E, + Z S, in D, − A c, in D.

æquale N q, in E q, − B in A, in E q.

Quo peracto, nova hæc æquatio, uno ad minus gradu depreſſior erit (quoad ſecundam radicem) quàm elatior ex duabus primùm propoſitis.

Patet nempe elatiorem ex duabus primùm propoſitis affici ſub cubo E, Iſtius verò nullam abs E, adfectionem excedere E q.

Nec tamen ſic quieſcendum, ſed iteranda duplicatæ æqualitatis analogia, donec adfectio ſecundæ radicis fiat tantùm ſub latere, ut aſymmetria omnis evaneſcat.

Præparetur itaque ultima hæc æquatio juxta modum præſcriptum, & homogenea ſub E, quomodocumque affecta unam æquationis partem faciant.

Erit itaque Z S, in D − Ac in D, æquale N q, in E q, − B, in A, in E q, − Z S, in E + A c, in E.

Sed ex duabus primùm propositis, quæ depressior est, exhibet æquationem sequentem ut diximus.

N q, − B, in A.
æquale E q, + D, in E.

Revocetur rursum ad analogiam duplicata ista æqualitas.

Erit itaque
Z S, in D, − A c, in D, ad
N q, in E q, − B, in A, in E q, − Z S, in E + A c, in E.
ut N q, − B, in A, ad
E q, + D, in E.

Cum itaque factum sub extremis æquabitur facto sub mediis, tamquam ipsi æquale, omnia homogenea poterunt dividi per E, ut supra demonstratum est. Erit nempe
Z S, in D, in E q, + Z S, in D q, in E, − A c, in D, in E q, − A c, in D q, in E.
æquale
N qq, in E q, − N q, − in B, in A, in E q, − N q, in Z S, in E + N q, in A c, in E, − B, in A, in N q, in E q, + B q, in A q, in E q, + B, in Z S, in A, in E, − B, in A q q, in E.

Et omnibus abs E, divisis, fiet tandem Z S, in D, in E, + Z S, in D q, − A c, in D, in E − Ac in D q.
æquale
N qq, in E − N q, in B, in A − in E − N q, in Z S, + N q, in A c. − B, in A, in N q, in E, + B q, in A q, in E, + B, in Z S, in A − B in A qq.

Quo peracto, nova hæc æquatio unius adhuc gradus depressionem (quoad secundam radicem) lucrata est, ut hic patet. Cum enim homogenea sub E, adfecta in unam æquationis partem transierint.

Fiet Z S, in D q, − Ac in D q + N q, in Z S − N q, in Ac − B in Z S, in A + B in A qq.
æquale N qq, in E − N q, in B, in A, in E − B, in A, in N q, in E, + B q, in A q, in E − Z S, in D, in E, + A c, in D, in E.

Neque ùlteriùs progrediendum, cum jam secunda radix sub latere tantùm appareat; ideoque solo applicationis beneficio ipsius E, relatio ad primam radicem manifestabitur. Vt hic,

Z S, in D q, − Ac in D q, + N q, in Z S, − N q, in Ac − B, in Z S, in A + B, in A qq.
————————————————————
N qq − N q, in B, in A − N q, in B, in A + B q, in A q, − Z S, in D + A c, in D.

æquabitur E, quò tendendum erat.

Ut igitur duæ primùm propositæ radices in unam transeant, resumatur ex duabus prioribus æquationibus quam volueris: depressior tamen idonea magis, ne altiùs ascendat æquatio.

Cum itaque in una ex æquationibus primùm propositis B, in A + E q + D, in E, æquetur N q, loco ipsius E, subrogetur jam agnitus ejus valor per relationem, vel ad terminos cognitos vel ad priorem radicem, quæ in exemplo proposito est A. Et rursum sub hac nova specie ordinetur æquatio; manifestum est evanuisse omnino secundam radicem, & in æquationem ab omni asymmetria liberam itum esse, methodumque esse generalem. Si enim plures duobus terminis proponantur incogniti, methodus iterata terrias. Si opus fuerit, radices ad primas & secundas; deinde secundas ad primas, &c. eodem prorsus artificio reducet.

APPENDIX

Ad ſuperiorem methodum.

SUPERIORI methodo debetur perfecta & abſoluta aſymmetriarum in Algebricis expurgatio. Neque enim ſymmetrica climatiſmus Vietæa, quæ unicum hactenus ad aſymmetrias fuit remedium, efficax ſatis & ſufficiens inventa eſt.

Proponatur quippe latus cubicum (B, in A qu. — A cub. + lat. quad. (A q, + 2. in A) + latus quad. quad. D, cub. in A — A, qu. qu.) + latus quad. (G, in A, — A q,) æquari rectæ N.

Qua ratione ab aſymmetriis hujuſmodi extricabit ſe & quæſtionem ſuam Analyſta Vietæus? An non potiùs dum creſcet labor, creſcet difficultas? Et tandem fatigatus & deluſus novum ab analytice lumen expoſcet?

Hoc ſanè luculenter ſuperior methodus ſubminiſtrat: Vnicum exemplum, idque breviſſimum, adjungimus. Recluſo enim ſemel fundamento, cætera apertiſſimè manifeſtantur.

Proponatur lat. cub. (2. in A qu. — A, cub.) — L, cub.(Ac + B q, in A) æquari D.

Ita primum ordinetur æquatio, ut unica ex aſymmetriis unam illius partem faciat.

Fiat nempe D — lat. cub. (Ac + B q, in A) æqualis lat. cub. (2. in A q — A cub.)

Hoc peracto omnes termini aſymmetri à ſecundis & ulterioribus, ſi opus fuerit, radicibus denominentur, excepto eo, quem unicum in unam æquationis partem rejecimus.

Fingatur, verbi gratiâ, lat. cub. (A cub. + B q, in A) eſſe E.

Hac enim viâ ad eam quam injungit ſuperior methodus, duplicatæ æqualitatis analogiam deveniemus.

Erit nempe D — E, æqualis lat. cub. (2. in A q, — Ac,) & omnibus in cubum ductis. D, cubus + D, in E qu. ter — D q, in E, ter — E c. æquabitur 2. in A q — Ac.

Sed ex hypotheſi E, cubus æquatur A, cubò + B, qu. in A.

Ergo oritur duplicata æqualitas, & in utraque (juxta methodum) termini abs ſecunda radice adfecti, in unam æquationis partem ſunt conjiciendi. Erit nempe.

2. in A q — Ac — D c, æqualis D, in E q, ter — D q, in E, ter — Ec.

Item A, cub. + B^2 in A, æqualis E, cub.

Iteretur toties operatio, donec ſecunda radix ad primam revocetur. Quo peracto, loco ipſius E, novus ipſius valor uſurpetur, & ſub hac nova ſpecie quævis ex prioribus æqualitatibus ordinetur, omnia conſtabunt.

Nec inutilia adjungo, aut moror in ſuperfluis. Quis enim non videt ſingulos terminos aſymmetros poſſe eadem ratione, ſi non ſufficiant ſecundæ radices, tertiis, quartis, &c. in infinitum inſigniri? Quo caſu quartam, ſive ultimam radicem tamquam ſe-

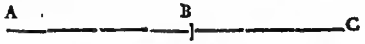
cundam considerabis. Reliquas verò tantisper, vel pro primis, vel pro terminis cognitis habebis, donec ultima illa omnino evanuerit, sive ad primas, secundas & tertias reducta fuerint. Simili prorsus artificio tertias reduces ad secundas & primas, ac denique secundas ad primas, ut jam sæpius inculcavimus.

Nulla est ergo asymmetria quam non cogat exulare hæc methodus, cujus usus præsertim eximius, imò & necessarius innumerosa potestatum resolutione. Statim enim nempe atque asymmetriæ evanuerint, non deerit Vietæum in arithmeticis quæstionibus artificium: & si veris explicari numeris quæstio non possit, proximæ, quantumvis libuerit, suppetent solutiones. Cum tamen proximas veris solutiones, nullo pacto, quandiu duraverint asymmetriæ, consequi possis.

Sed & ulteriùs inquirenti obtulit se mira ad locorum superficialium plenam & perfectam notitiam exinde derivanda methodus, quæ & ijs problematis inservit, in quibus dantur ab initio plura quam requirat ipsa problematis construendi determinatio.

Quod ut clariùs intelligas, sunt quædam problemata quæ unicam tantùm agnoscunt positionem ignotam, quæ vocari possunt determinata, ad differentiam inter ipsa & problemata localia constituendam. Sunt alia quædam quæ duas positiones ignotas habent, & ad unicam tantùm numquam possunt reduci; ea problemata sunt localia. In prioribus illis unicum tantum punctum inquirimus; in istis lineam. Sed si problema propositum tres ignotas positiones admittat, problema hujusmodi non jam punctum dumtaxat, aut lineam tantùm, sed integram superficiem quæstioni idoneam investigat. Indeque oriuntur loci ad superficiem, &c. in reliquis.

Sicut autem in prioribus data ipsa sufficiunt ad determinationem quæstionis, ita in secundis unum datum deest ad determinationem; in tertiis verò duo tantùm data determinationem possunt complere. At contrà potest fieri ut quemadmodum in his casibus data aut sufficiant aut desint: ita in plerisque aliis data ipsa superflua sint & abundent. Exemplo res fiet evidens.



In recta A C, datâ, datur rectangulum A B C. Datur etiam differentia quadratorum A B, & B C.

In hoc casu plura patet offerri data quàm determinatio, ideoque solutio ipsius quæstionis exposcat.

Frequentissimus tamen horum problematum, in physicis præsertim & apud artifices est usus, eaque omnia per applicationem simplicem beneficio nostræ methodi expediuntur; neque recurrendum ad extractionem radicum, licèt æquationes ad quasvis potestates ascendant.

Proponatur, verbi gratiâ in quadam quæstione A, cub. + B, qu. in A, æquari 2. qu. in D.

Item etiam (cum ex hypothesi quæstio supponatur esse abundans: has enim quæstiones abundantes, sicut locales deficientes appellare consuevimus) G, sol. in A − A q q, æquari B, qu. in N, pl. Duplicata hæc æqualitas ad analogiam revocetur, & ex præscripta methodo consideretur unica nostra radix ignota, quæ in hoc exemplo est A, sicut in præcedentibus secundam, aut ulterioris ordinis radicem consideravimus, & toties juxta methodum iteretur operatio, donec adfectio sub A, per simplicem applicationem possit expediri, sive non tam ad primas radices, quàm ad terminos omnino notos reduci. Patebit solutio problematis simplicissima, nec analystam deinceps æquationes quadraticæ, &c. remorabuntur.

Lubet & coronidis loco, famosi illius problematis:

Datis ellipsi & puncto extra ipsius planum, superficiem conicam, cujus vertex sit punctum datum, & basis ellipsis data, ita plano secare, ut sectio sit circulus.

Solutionem quæ huic methodo debetur, indicare, eamque ſimpliciſſimam.

Eò deducunt quæſtionem Geometræ, ut ſumptis quinque punctis ad libitum in ellipſi, & junctis rectis à vertice conicæ ſuperficiei ad puncta illa per junctas quinque rectas circulum deſcribant. Inveniuntque problema hoc pacto eſſe ſolidum. Sed cum puncta in ellipſi ſint infinita, ſi loco quinque punctorum ſumantur ſex, fiet problema abundans, & orietur neceſſariò duplicata æqualitas, quæ tandem ignotam quantitatem per ſimplicem applicationem patefaciet.

Eadem ratione ſi detur quæcumque linea curva in plano, aut etiam ſuperficies localis, cujuſcumque tandem gradus ſint, invenientur diametri & axes figurarum; imo & in ſuperficie locali exhibebuntur omnes omnino curvæ loci ſuperficialis conſtitutivæ, &c.

Exponatur, verbi gratiâ, ſuperficies conica, cujus vertex ſit punctum datum, baſis verò, paraboie aut ellipſis cubica, aut quadratoquadratica, aut ulterioris in infinitum gradus.

Poteſt hujuſmodi ſuperficies conica, beneficio iſtius methodi ita ſecari, ut in ea exhibeatur quælibet curva, quæ ex conſtitutione figuræ in ea ſuperficie poteſt deſcribi, & problematis ſolutio ſemper evadet ſimpliciſſima.

Nihil addimus de tangentibus curvarum, & pleriſque aliis hujus methodi uſibus: fient quippe obvii, nec ſedulam indagatoris analytici meditationem effugient.

METHODUS

Ad disquirendam maximam & minimam.

OMNIS de inventione maximæ & minimæ doctrina, duabus positionibus ignotis innititur, & hac unica præceptione; statuatur quilibet quæstionis terminus esse A, sive planum, sive solidum, aut longitudo; prout proposito satisfieri par est, & inventa maxima aut minima in terminis sub A, gradu ut libet inuolutis; Ponatur rursus idem qui prius esse terminns A, + E, iterumque inveniatur maxima aut minima in terminis sub A & E, gradibus ut libet coefficientibus. Adæquentur, ut loquitur Diophantus, duo homogenea maximæ aut minimæ æqualia & demptis communibus (quo peracto homogenea omnia ex parte alterutra ab E, vel ipsius gradibus afficiuntur) applicentur omnia ad E, vel ad elatiorem ipsius gradum, donec aliquod ex homogeneis, ex parte utravis affectione sub E, omnino liberetur.

Elidantur deinde utrimque homogenea sub E, aut ipsius gradibus quomodolibet involuta & reliqua æquentur. Aut si ex unâ parte nihil superest æquentur sane, quod eodem recidit, negata adfirmatis. Resolutio ultimæ istius æqualitatis dabit valorem A, quâ cognita, maxima aut minima ex repetitis prioris resolutionis vestigiis innotescet.

Exemplum subijcimus

Sit recta A C, ita dividenda in E, ut rectang A E C, sit maximum; Recta A C, dicatur B.

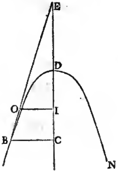


ponatur par altera B, esse A, ergo reliqua erit B − A, & rectang. sub segmentis erit B, in A − A^2 quod debet inueniri maximum. Ponatur rursus pars altera ipsius B, esse A, + E, ergò reliqua erit B − A − E, & rectang. sub segmentis erit B, in A, − A^2 + B, in E, ^2E in A, − E, quod debet adæquari superiori rectang. B, in A, − A^2, demptis communibus B, in E, adæquabitur A, in E^2 + E^2, & omnibus per E, divisis B, adæquabitur ^2A + E, elidatur E, B, æquabitur ^2A, Igitur B, bifariam est dividenda, ad solutionem propositi, nec potest generalior dari methodus.

De Tangentibus linearum curvarum.

AD superiorem methodum inventionem Tangentium ad data puncta in lineis quibuscumque curvis reducimus.

H 4

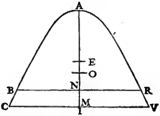


Sit data, verbi gratià, Parabole B D N, cujus vertex D, diameter D C, & punctum in ea datum B, ad quod ducenda est recta B E, tangens parabolen, & in puncto E, cum diametro concurrens, ergo sumendo quodlibet punctum O I, in recta B E, & ab eo ducendo ordinatam O I, à puncto autem B, ordinatam B C major erit proportio C D, ad D I, quàm quadrati B C, ad quadratum O I, quia punctum O, est extra parabolen, sed propter similitudinem triangulorum, ut B C, quad. ad O I, quad. ita C E, quad. ad I E, quad. Major igitur erit proportio C D ad D I, quàm quadrati C E ad quad. I E, Cum autem punctum B detur, datur applicata B C, ergo punctum C datur etiam C D, Sit igitur C D, æqualis D, datæ. Ponatur C E, esse A, ponatur C I esse E, ergo D, aut D − E habebit majorem rationem, quàm A^2 ad $A^2 + E^2 - A$, in E. Et ducendo inter se medias & extremas D in A^2 + D in E^2 − D in A in E, majus erit quàm D, in A^2 − A^2 in E, Adæquentur igitur juxta superiorem methodum, demptis itaque communibus D, in E^2 − D, in A in E adæquabitur − A^2 in E, aut quod idem est, D in E^2, + A^2 in E, adæquabitur D in A in E, Omnia dividantur per E, ergo D in E + A^2 adæquabitur D in A, elidatur D in E, ergo A^2 æquabitur D in A^2, ideoque A æquabitur D, ergo C E, probavimus duplam ipsius C D, quod quidem ita se habet.

Nec unquam fallit methodus, imò ad pleraſque quæstiones pulcherrimas potest extendi, ejus enim beneficio centra gravitatis in figuris lineis curvis & rectis comprehensis, & in solidis invenimus, & multa alia, de quibus fortasse aliàs, si otium suppetat. De quadraturis spatiorum sub lineis curvis & rectis contentorum, imò & de proportione solidorum ab eis ortorum ad conos ejusdem basis & altitudinis, fusè cum Domino de Roberval egimus.

Centrum

Centrum gravitatis, parabolici conoidis, ex eadem methodo.



ESTO parabolicus Conois C B A V, cujus axis I A, basis, circulus circa diametrum C I V, quæritur centrum gravitatis perpetuâ & constanti, quâ maximam, & minimam & tangentes linearum curvarum investigavimus methodo, ut novis exemplis & novo usu, eoque illustri, pateat falli eos qui fallere methodum existimant.

Ut possit parari analysis, axis I A, dicatur B, ponatur centrum gravitatis esse O, & rectam A O, ignotam, dici A, secetur axis I A, quovis plano ut B N, & ponatur I N, esse E, ergò N A, erit B -- E, constat in hac figura & similibus (parabolis aut parabolicis) centra gravitatum in portionibus abscissis, per parallelas basi in eadem proportione dividere axes (quod in parabola ab Archimede demonstratum porrigitur, non dissimili ratiocinio ad parabolas omnes, & parabolicos conoides, ut patet) ergo centrum gravitatis portionis cujus axis N A, basis semidiameter B N, ita dividet A N, in puncto, verbi gratia, E, ut ratio N A, ad A E, sit eadem rationi I A, ad A O, erit igitur in notis ut B, ad A, ita B — E, ad portionem axis A E, quæ idcirco æquabitur $\frac{B \text{ in } A - A \text{ in } E}{B}$, & ipsa O E, quæ est intervallum inter duo centra gravitatis æquabitur $\frac{A \text{ in } E}{B}$, ponatur portionis reliquæ C B R V, centrum gravitatis esse M, quod necessariò debet esse inter puncta N, & intra figuram per pet. 9. Archimed. de æquipond. cum figura C B R V, sit in easdem partes cavas, sed ut portio C B R V, ad portionem B A R, ita est E O, ad O M, cum O, sit centrum gravitatis totius figuræ C A V, & puncta E, & M, sint centra gravitatis partium, Portio autem C A V, ad portionem B A R, est in nostro conoide Archimedæo ut quadratum I A, ad quadratum N A, hoc est in notis ut b^2 ad $B^2 + E^2 - B$ in E^2, ergo dividendo portio C B R V, est ad portionem B A R, ut B in $E^2 - E^2$ B in E^2, demonstrauimus autem ut portio C B R V, ad portionem B A R, ita esse O E, ad O M, erit igitur in notis ut B in E^2 — ad $B^2 + E^2 + E^2$ E B, in E^2 ita O E, sive $\frac{A \text{ in } E}{B}$, ad O M, quæ proinde applicabitur $\frac{B^2 \text{ in } A \text{ in } E^2 + A \text{ in } E^2 - B \text{ in } A, \text{ in } {}^2E^2}{B^2 \text{ in } E^2 - B \text{ in } {}^2B}$

Cum autem punctum M, ex demonstratis, sit inter puncta N, & I, ergo recta

O M, erit minor rectâ OI recta autem O I, in notis est $B - A$, deducta est igitur quæstio ad methodum, & adæquanda $B - A$ cum $\frac{B^2 \text{ in } A, \text{ in } E, + A \text{ in } E^3 - B \text{ in } A \text{ in } {}^2E^2}{B^2 \text{ in } E^2 - B \text{ in } E^2}$.

Et omnibus ductis in denominatorem & abs E divisis adæquabuntur $^2B^3 - B^2$ in $^2A - B^2$ in $E - B$ in A in E, & B^2 in $A + E^3 - B$ in A in ^2E, quandoquidem nihil est utrimque commune elidantur homogenea omnia ab E, adfecta, & æquentur reliqua, fiet $^2B^3 - B^2$ in ^2A æqualis B^2 in A, ideoque ^3A æquabitur ^2B. Erit igitur I A, ad A O, ut 3. ad 2. & A O, ad O I, ut 2, ad 1, quod erat inveniendum. Non dissimili methodo in quibuslibet parabolis in infinitum, & parabolicis conoidibus inveniuntur centra gravitatum.

Quemadmodum autem, verbi gratia, in nostro conoide parabolico circa applicatam axi converso indaganda sint centra gravitatis, non vacat in præsens judicare, sufficit aperuisse me in hoc nostro conoide centrum gravitatis dividere axem in portiones quæ servant proportionem 11. ad. 51.

Ad eamdem methodum.



VOLO mea methodo secare lineam A C datam ad punctum B, ita ut solidum contentum sub quadrato A B, & linea B C sit maximum omnium solidorum eodem modo descriptorum secando lineam A C, in quovis alio puncto.

Ponamus in notis Algebricis lineam A C, vocari B, & lineam A B, incognitam A, B C, erit $B - A$; oportet igitur solidum A^2 in $B - A$, satisfacere quæstioni.

Sumamus iterum loco A, $A + E$, solidum quod fiet ex quad. $A + E$, & ex B E A, erit B in A^2, $+ B$ in E^2 $+ B$ in A in $^2E - A^3 - A$ in $^3E^2 - A^2$ in ^3E.

Id comparo primò solido A^2 in $B - A^3$, tamquam essent æqualia, licèt reverà æqualia non sint, & hujusmodi comparationem vocavi adæqualitatem, ut loquitur Diophantus, sic enim interpretari possum græcam vocem παρισότης qua ille utitur, deinde è duobus solidis demo quod iis est commune scilicet B^2, in $A - A^3$, quo peracto nihil ex unâ parte superest, & superest ex alia B in $E^2 + B$ in A in $^2E - A^3$ in $^3E^2 - A^2$ in $^3E - E^3$, Comparanda sunt ergo homogenea notata signo + cum ijs quæ notantur signo −, & iterare comparationem adæqualitatem oportet inter B in $E + B$, in A, in ^2E, ex unâ parte, & A, in $^3E^2 + A^2$ in $^3E + E^3$ ex altera totum dividamus per E. Comparatio adæqualitas, erit inter B, in $E + B$, in ^2A, & A, in $^3E + {}^3A^2 + E^2$.

Hac divisione peracta si omnia homogenea dividi possunt per E, iterandà erit divisio per E, donec reperiatur aliquod ex homogeneis quod hujusmodi divisionem non admittat, id est, ut Vietæis verbis utar, quod non afficiatur ab E, sed quia in exemplo proposito comperimus divisionem iterari non posse, hîc standum est. Deinde utrimque deleo homogenea, quæ afficiuntur ab E, superest ex unâ parte B, in ^2A, & ex alia $^3A^2$, inter quæ non amplius facere oportet æquationes, ut antea, comparationes fictas & adæqualitates, sed veram æquationem. Dividamus totum per A, ergo ^2B, erit æquale ^3A, & B, erit ad A, ut 3 ad 2. Redeamus ad nostram quæstionem, & dividamus A C, in puncto B, ita ut A C, sit ad A B, ut 3 ad 2 dico solidum quadrati A B, in B C, esse maximum omnium quæ describi possunt in eadem linea C, in qualibet alia sectione.

Ut pateat hujus methodi certitudo, desumam exemplum è libro Apollonij de determinata sectione, qui ut ressert Pappus initio septimi libri, difficiles determinationes habebat, & eam quæ sequitur difficillimam esse existimo, quam ut ut inventam supponit Pappus septimo libro, nec enim illam veram esse demonstrat, sed ut veram supponens, alias inde consequentias deducit. Hoc loco Pappus vocat minimam proportionem μοναχὸν καὶ ἐλάχιστον minimam & singularem, ideò scilicèt, quia si proponatur quæstio circa magnitudines datas duobus semper locis satisfit quæstioni; sed in minimo aut maximo termino unicus est qui satisfaciat locus, idcirco Pappus vocat minimam & singularem, id est unicam quæstionem omnium quæ proponi possunt minimam. Commandinus hoc loco dubitat, quid per μοναχὸν intelligat Pappus, & veritatem quam modo explicui ignoravit; sed ecce propositionem. Sit recta data OMID, & in ea quatuor puncta OMID,



data, dividenda est portio MI, in puncto N, Ita ut rectanguli OND, sit ad rectangulum MNI, proportio minor, quàm proportio cujuslibet rectanguli paris OND, ad quodvis aliud par MNI, supponamus in notis lineam OM, datam vocari B, lineam DM, datam Z, & MI, datam G, fingamus nunc MN, quod quærimus vocari A, ergo rectangulum OND, in notis B, in Z − B, in A + Z, in A − A^2 & rectangulum MNI, erit G, in A − A^2, oportet igitur proportionem B, in Z − B + Z, in A − A^2 ad G, in A − A^2 esse minimam omnium quæ fieri possunt qualibet alia divisione lineæ MI, sumamus iterùm loco A, A + E, & habebimus proportionem B, in Z − B, in A − B, in E + Z, in A + Z in E − A^2 − E^2 − A, in ^2E, ad G, in A + G, in E − A^2 − E^2 − A, in ^2E, quam primæ comparare per adæqualitatem oportebit, id est multiplicare primum terminum per quartum ex una parte, & secundum per tertium ex alia, & simul hæc duo producta comparare, productum B, in Z − B, in A + Z, in A − A^2 qui prior est terminus per G, in A, + G, in E − A^2 − E^2 − A, in ^2E, qui est ultimus terminus, facit B, in Z, in G, in A − G, in B, in A^2 + G, in Z, in A^2 − G, in A^3 + B in Z in G in E − B in A in G in E + Z in A in G in E − A^2 in G in E − B in Z in A^2 + B in A^3 − Z in A^3 + A^4 − B in Z, in E^2 + B in A in E^2 − Z in A in E^2 + A^2 in E^2 − B in Z in A in ^2E + B in A^2 in ^2E − Z in A^2 in ^2E − Z in A^2 in ^2E + A^3 in ^2E.

Productum autem G in A − A^2 secundi termini per B in Z − B in A − B in E + Z in A + Z in E − A^2 − E^2 − A in ^2E tertium terminum facit B in Z in G in A − G in B in A^2 − G in B in A in E + G in Z in A^2 + G in Z in A in E − G in A^3 − G in A in E^2 − G in A^2 in ^2E − B in Z in A^2 + B in A^3 + B in A^2 in E − Z in A^3 − Z in A^2 in E + A^4 + A^2 in E^2 + A^3 in ^2E.

Comparo hæc duo producta per adæqualitatem, demamus quod ipsis commune est & residuum dividamus per E, supererit ex una parte B in Z in G − A^2 in G − B in Z in E + B in A in E − Z in A in E − B in Z in ^2A − Z in $^2A^2$ − B in $^2A^2$, & ex alia G in A in E − G in $^2A^2$ + B in A^2 − Z in A^2.

Deleamus omnia homogenea inter quæ iterum reperitur E, supererit,

B in Z in G − A^2 in G − B in Z in ^2A − Z in $^2A^2$ + B in $^2A^2$ æquale.

− G in $^2A^2$ + B in A^2 − Z in A^2.

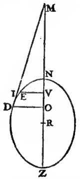
Et transponendo.

− B in A^2 + Z in A^2 − G in A^2 + B in Z in ^2A erit æquale B in Z in G.

Istius æquationis resolutione reperiemus valorem lineæ A, id est valorem MN, & consequenter punct. N & inveniemus veritatem propositionis Pappi qui docet ad reperiendum punctum N, oportere facere ut rectangulum OND ad rectangulum OID, ita quadratum MN ad quadratum NI, æquationis enim resolutio nos ad eamdem constructionem deducit.

Ut tandem tangentibus applicetur hæc methodus ſic procedere poſſum.

Sit, verbi gratiâ, Ellipſis Z D N, cujus axis ſit Z N, & centrum R, ſumamus punctum ut D, in ejus circumferentia à quo ducamus lineam D M quæ tangat Ellipſim, ducamus præterea applicatam D O, & ſupponamus notis Algebricis O Z datam vocari B & O N datam vocari G, fingamus O M quam quærimus incognitam vocari A, intel-



ligimus autem per O M portionem Axis contentam inter punctum V ſumptum ad libitum, inter punctum O & concurſum tangentis.

Quoniam D M tangit Ellipſim ſi ducamus lineam I E V parallelam D O per punctum V ſumptum ad libitum inter O & N, certum eſt lineâ I E V ſecari tangentem D N, & Ellipſim quoque ut in punctis E & I, & quia linea D M tangit Ellipſim omnia puncta præter D erunt extra Ellipſim, ergo linea I V, erit major lineâ E V. Erit igitur major proportio quadrati D O ad quadratum E V quam quad. D O ad quad. I V, ſed ut quad. D O ad quad. E V ita proprietate Ellipſis rectang. Z O N eſt ad rectang. Z V N, & ut quad. D O ad quad. I V ita quad. O M ad quad. V M, major eſt igitur proportio rectang. Z O N ad rectang. Z V N quam quad. O M ad quad. V M. Fingamus ſumptam ad libitum æqualem E, rectang. Z O N erit B in G, rectang. Z V N erit B in G − B in E + G in E − E^2 quad. O M erit A^2 quad. V M A^2 + E^2 − A in ^{2}E.

Erit igitur major proportio B in G ad B in G − B in E + G in E − E^2 quam A^2 ad A^2 − E^2 − A in ^{2}E. Et conſequenter ſi multiplicetur prior terminus per ultimum & ſecundus per tertium B in G in A^2 + B in G in E^2 − B in G in A in ^{2}E, productum ſcilicet prioris termini per ultimum, erit majus B in G in A^2 − B in E in A^2 + G in E in A^2 − A^2 in E^2.

Oportet igitur juxta meam methodum comparare hæc duo producta per adæqualitatem; demamus quod iis commune eſt & dividamus reſiduum per E, ſupererit ex unâ parte,

B in G in E − B in G in ^{2}A, & ex alia,

− B in A^2 + G in A^2 − A^2 in E Deleamus homog. quæ aliquid habent lineæ E, ſupererit ex una parte,

− B in ^{2}A, & ex alia − B in A^2 + G in A^2.

Quos duos terminos juxta methodum æquare oportet & tranſponendo terminos ut par eſt, inveniemus B in A − G in A, æquale B in ^{2}G. Vides hanc reſolutionem eam-

dem esse cum Apolloniana, nam meâ constructione ad reperiendam tangentem oportet facere ut B – G ad G ita ^{2}B ad A, id est ut Z O – O N ad O N, ita ^{2}Z O ad O N, sed Apollonianâ oportet facere ut Z O ad O N, ita Z M ad M N. Duæ autem illæ constructiones ut patet in idem recidunt; plura possem alia exempla addere, tum primi tum secundi casus meæ methodi, sed hæc sufficiunt, & eam esse generalem ac numquam fallere satis probant. Demonstrationem regulæ non adjicio nec plerosque alios usus qui illius perfectionem confirmare possent, nec inventionem centrorum gravitatis asymptoton quorum exemplum misi doctissimo D. de Roberval.

Ad eamdem Methodum.

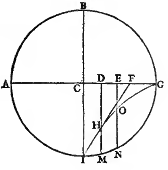
DOctrinam tangentium antecedit jamdudum tradita Methodus de inventione maximæ & minimæ, cujus beneficio terminantur quæstiones omnes dioristicæ, & famosa illa problemata quæ apud Pappum in Præf. lib. 7. difficiles determinationes habere dicuntur, facillimè determinantur.

Lineæ curvæ, in quibus tangentes, inquirimus, proprietates suas specificas vel per lineas rectas tantùm absolvunt, vel per curvas, rectis aut alijs curvis quomodolibet implicatas.

Priori casui jam satisfactum est præcepto, quod quia concisum nimis, difficile sanè, sed tamen sufficiens tandem repertum est.

Consideramus nempe in plano cujuslibet curvæ rectas duas positione datas, quarum altera diameter, si libeat, altera applicata nuncupetur. Deinde jam inventam tangentem supponentes ad datum in curva punctum, proprietatem specificam curvæ, non in curva ampliùs, sed in invenienda tangente, per æqualitatem consideramus, & elisis, quæ monet doctrina de maxima & minima, homogeneis fit demum æqualitas, quæ punctum concursus tangentis cum diametro determinat, ideóque ipsam tangentem.

Exemplis, quæ olim multiplicia dedimus, addatur, si placet, tangens cissoidis, cujus Diocles traditur inventor.



Esto circulus duabus diametris A G, B I, normaliter sectis, & sit cissois I H G, in qua sumpto quolibet puncto, ut H, ducenda est à puncto H, tangens ad cissoidem, sit factum, & ducta tangens H F, secet rectam C G, in F, ponatur recta D F, esse A, & sumpto quolibet puncto inter D, & F, ut E, ponatur recta D E esse E. Cum igitur ex proprietate specifica cissoïdis recta M D, sit ad D G, ut D G, ad D H, fiat jam in terminis analyticis per adæqualitatem, ut N E, ad E G, ita E G, ad portionem rectæ E N, quæ intercipitur inter punctum E, & tangentem, & est E O,

Vocetur A D, data Z.
D G, data N.
D H, data R.
D F, quæsita, ut diximus, A,
D E, sumpta ad libitum E.
Ergo E G, vocabitur N–E.
E O, vocabitur $\frac{R \text{ in } A - R \text{ in } E}{A}$.
E N, vocabitur latus Z in N – Z in E + N in E – E^2.

Cùm igitur ex præcepto proprietas specifica debeat considerari, non amplius in curva, sed in tangente, ideoque faciendum sit ut N E, ad E G, ita E G, ad E O, quæ applicatur tangenti: ergo in terminis analyticis faciendum ut

Latus Z in N – Z in E + N in E – E^2,
Ad N – E.
Ita N – E.
Ad $\frac{R \text{ in } A - R \text{ in } E}{A}$.

Et quadratis singulis terminis ad vitandam asymmetriam fiet ut

Z in N – Z in E + N in E – E^2.
Ad N^2, + E^2. – N in 2E.
Ita N^2 + E^2.
Ad $\frac{R^2 A^2 + R^2 E^2 - R^2 A\,2E}{A^2}$.

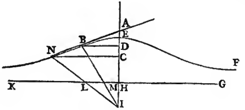
Ducantur singula homogenea in A^2, & deinde quod fit sub extremis, adæquetur ex præceptis artis, ei quod fit a medio, elisis deinde superfluis, ut monet methodus, tandem orietur æqualitas inter

Z^2 A + N A, ex una parte, & Z^2 N, ex altera.

Construetur igitur tangens hoc pacto. Producatur semidiameter circuli dati A ad punctum V, & fiat A V recta æqualis A C, rectæ, Rectangulum A D G ad rectam V D, applicetur, & faciat latitudinem D F, juncta recta F H, tanget cissoïdem.

Indicemus etiam modum agendi in Conchoide Nicomedæâ, sed indicemus tantum, ne proclivior evadat sermo.

Esto conchois Nicomedæa, ut construitur apud Pappum & Eutocium figura sequens.



Polus est punctum I, recta K G, est asymptotos curvæ, recta I H E, perpendicularis ad asymptoton. Punctum N datum in curva, ad quam ab eo puncto ducenda tangens B A concurrens cum I E in puncto A, sit factum ut supra, ducatur N C, parallela K G, ex proprietate specifica curvæ, recta L N est æqualis rectæ H E. Sumatur quodlibet punctum inter C & E, ut D à quo rectæ C N parallela ducatur D B, occurrens tangenti in puncto B. Quia igitur proprietas specifica debet considerari in tangente, jungatur B G, occurrens rectæ K G, in M, & ex præceptis artis recta M B adæquetur rectæ H E, orietur tandem quæsita æqualitas, quod ut prodeat,

C A, ut supra vocetur A

C D, sit E

E N data sit Z

Et reliquæ datæ suis nominibus designentur.

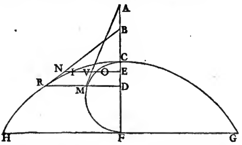
Invenietur facillimè recta M B, in terminis analyticis, quæ si adæquetur, ut dictum rectæ H E, solvetur quæstio.

Hæc de priore casu videntur sufficere. Licet enim praxes infinitæ suppetant, quæ prolixitates evitant; ex his tamen nullo negotio deduci possunt.

Secundo casui, quem difficilem judicabat D. DesCartes, cui nihil difficile, elegantissima, & non insubtili methodo fit satis.

Quamdiu rectis tantùm lineis homogenea implicabuntur, quærantur ipsa & designentur per præcedentem formulam, Imò & vitandæ asymmetriæ causâ aliquando, si libuerit, applicatæ ad tangentes ex superiore methodo inventas, pro applicatis ad ipsas curvas sumantur, & demùm, quod operæ pretium est, portiones tangentium jam inventarum pro portionibus curvæ ipsis subjacentis sumantur, & procedat æqualitas, ut supra monuimus, proposito nullo negotio satisfiet.

Exemplum in curva Cycloide D. De Roberval assignamus.



Sit curva H R I C, cujus vertex C, axis E F, & descripto semicirculo C O M F, sumatur punctum quodlibet in curva, ut R, a quo est ducenda tangens R B, ducatur à puncto R recta R M D, perpendicularis in C D F, quæ secet semicirculum in M. Ea igitur curvæ proprietas specifica est, ut recta R D, sit æqualis portioni circuli A M, & applicatæ D M: Ducatur in puncto M, ex præcedente methodo tangens M A, ad circulum, (eadem nempe procederent si curva C O M esset alterius naturæ) Ponatur factum quod quæritur, & sit recta D B quæsita, æqualis A, D A inventa ex constructione æqualis B.

M A itidem inventa vocetur D,

M D data vocetur R,

R D vocetur Z

C M portio circumferentiæ data fit N

D E recta utcumque assumpta fit E,

Et a puncto E ducatur E O V I N parallela rectæ R M D,

Fiat ut A ad A — E, ita Z ad $\frac{ZA - ZE}{A}$ quæ idcirco æquabitur rectæ N I O V E;

Igitur recta $\frac{ZA - ZE}{A}$ debet æquari propter proprietatem specificam curvæ quæ in tangente consideranda est, rectæ O E, unà cum curva C O. Curva autem C O æquatur curvæ C M — curvâ M O. Ergo recta $\frac{ZA - ZE}{A}$ debet æquari rectæ O E, & curvæ C M — curvâ M O. Ut autem hi termini ad terminos analyticos reducantur, pro rectâ O E, ad vitandam asymmetriam, ex superiore cautione sumatur recta E V, applicata tangenti; & pro curva M O, sumatur portio tangentis M V, cui ipsa M O adjacet: ad inveniendam autem E V, in terminis analyticis fiet ut B ad B — E, ita R ad $\frac{RB - RE}{B}$ quæ idcirco æquabitur ipsi E V.

Ad inveniendam deinde M V, fiet ut B, ad D, ita E ad $\frac{DE}{B}$, quæ idcirco propter triangulorum similitudinem, ut supra, æquabitur M V: Curva autem C M, vocata est N, igitur in terminis analyticis fiet æqualitas inter $\frac{ZA - ZE}{A}$ ex una parte

Et $\frac{RB - RE}{B} + N - \frac{DE}{B}$, ex altera;

Ducantur omnia in B A,

Z B A — Z B E ∽ R B E — R A E + B N A — D A E,

Cum autem ex proprietate curvæ Z ∽ R + N ergo

Z B A ∽ R B A + B N A,

Ideoque ablatis communibus, reliqua comparentur,

Nempe Z B E, cum R A E + D A E,

Fiat divisio per E. Et quia nullum est hoc casu homogeneum superfluum, nulla fieri debet elisio. Igitur

Z B ∽ R A + D A. Et fiet ut

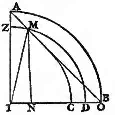
R + D, ad B, ita Z, ad A.

Ad construendum igitur problema, si fiat ut aggregatum rectarum M A, M D, ad rectam D A, ita R D, ad DB. Juncta B R tanget curvam C R. Quia verò ut summa rectarum M A, MD, ad D A, ita M D, ad D C, ut facile est demonstrare. Ideo faciendum erit ut M D ad D C, ita R D, ad D B, sive ut elegantior evadat constructio junctæ rectæ M C, ducenda erit parallela R B.

Eadem methodo species omnes illius curvæ tangentes suas nanciscentur.

Constructionem generalem olim dedimus.

Quoniam verò quæsitum est de tangente quadratariæ, sive quadratricis Dinostrati, ita construimus ex præceptis præcedentibus.



Sit quadrans circuli A I B, quadrataria A M C, in qua ad datum punctum M, ducenda est tangens. Juncta M I, centro I, intervallo I M quadrans Z M D, describatur, & ducta perpendiculari M N, fiat ut I M ad M N, ita portio quadrantis M D, ad rectam N O, juncta M O, tanget quadratariam; hæc sufficiant.

Quia tamen sæpiùs curvatura mutatur, ut in Conchoïde Nicomedæa, quæ pertinet ad priorem casum, & in omnibus speciebus curvæ Domini De Roberval, primâ exceptâ quæ pertinet ad secundum, ut perfectè curva possit delineari, investiganda sunt ex arte puncta inflexionum, in quibus curvatura ex convexâ fit concava, vel contra. Cui negotio eleganter inservit doctrina de maximis & minimis.

Hoc præmisso lemmate generali.

Esto in sequenti figura curva AH F G, cujus curvatura in puncto H, verbi gratiâ, mutetur; Ducatur tangens H B, applicata H C, angulus H B C, erit minimus omnium quos tangentes cum axe A C D, sive infra, sive supra punctum H, efficiunt, ut facile est demonstrare. Sumatur enim supra H, punctum, punctum M, tangens occurret axi inter A & B, ut in N, igitur angulus ad N major erit angulo ad B. Similiter si infra punctum H, sumatur punctum F punctum D, in quo concurrit tangens F D, cum axe erit inferius puncto B, & tangens D F, occurret tangenti BH, ad partes F & H. Igitur angulus ad D, erit major angulo ad B. Casus omnes non persequimur, sed modum tantùm investigandi indicamus, cum curvarum formarum infinitas species exhibeant. Ut igitur verbi gratiâ, in exposito diagrammate punctum H, inveniatur, quæratur primùm ex superiore methodo ad punctum quodlibet curuæ utcumque sumptum proprietas tangentis. Hâc inventâ quæratur per doctrinam de maximis & minimis punctum H, à quo ducendo perpendicularem H C, & tangentem H B, recta H C, ad C B, habeat minimam proportionem. Eâ enim ratione angulus ad B erit minimus. Dico punctum H, ita inventum esse initium mutationis in curvatura.

Ex prædicta methodo de maximis & minimis derivantur artificio singulari inventiones centrorum gravitatis, ut aliàs indicavi.

Sed & coronidis loco possunt etiam & datâ curvâ inveniri ipsius asymptoti quæ in curvis infinitis miras exhibent proprietates. Sed hæc si libuerit, fusiùs aliquando explicabimus & demonstrabimus.

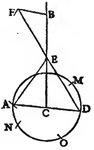
DE CONTACTIBUS SPHÆRICIS.

APOLLONII Pergæi doctrinam τῶν ἐπαφῶν restituit eleganter Apollonius Gallus aut sub illius nominis larvâ Franciscus ille Vieta Fontenæensis cujus miræ in Mathematicis lucubrationes veteri geometriæ felices præstitere suppetias. Verùm qui materiam hanc contactuum quæ hactenus substitit in planis, ulteriùs promoverit, & ad sphærica problemata evehere sit ausus, adhuc, quod sciam, extitit nemo; præclara tamen inde problemata deduci & ad elegantem sublimiorum problematum constructionem facillimè derivari patebit statim. Quærenda itaque sphæta qua per data puncta transeat aut sphæras & data plana contingat. Quindecim problematis totum negotium absolvetur.

PROBLEMA I.

Datis quatuor punctis sphæram invenire quæ per data transeat.

DEntur quatuor puncta N O M F, per quæ Sphæra describenda est sumptis ad libitum tribus N O M, circa triangulum N O M, quod in uno esse plano constat ex elementis; describatur circulus N A O M, quem & magnitudine & positione dari perſ-

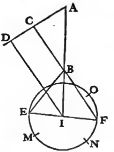


picuum eſt, eſſe autem circulum N A O M, in ſuperficie inveniendæ Sphæræ patet, ex eo quod ſi Sphæra plano ſecetur ſectionem datò circulum, at per tria puncta N M O, Unicus tantùm circulus deſcribi poteſt, quem jam conſtruximus, cum igitur tria puncta N O M ſint in ſuperficie Sphæræ quæſitæ, ergo planum trianguli N O M, Sphæram quæſitam ſecat ſecundum circulum N A O M, quem ideo in ſuperficie Sphæræ eſſe concludimus. Sit ipſius centrum C, à quo ad planum circuli excitetur perpendicularis C E B, patet in recta C B, eſſe centrum Sphæræ quæſitæ, à puncto F, in rectam C B, demittatur perpendicularis F B, quam & poſitione & magnitudine dari perſpicuum eſt, à puncto C, ducatur C A D, ipſi F B, parallela, erit igitur angulus B C A rectus, ſed & recta B C, eſt perpendicularis ad planum circuli. Ergo recta A C D, eſt in plano circuli, & datur poſitione, dantur itaque puncta A D, in quibus cum circulo concurrit, ponatur jam factum eſſe, & centrum inveniendæ Sphæræ eſſe E, quod quidem in rectâ C B, reperiri jam diximus ex Theodoſio junctæ rectæ F E, A E, E D, erunt æquales, cum tria puncta nempe F, ex hypotheſi & A, & D, ex demonſtratis ſint in ſuperficie ſphætica, at tres rectæ F E, A E, E D, ſunt in eodem plano, cum enim rectæ F B, A C D, ſint parallelæ, erunt in eodem plano, ſed & recta C B, ideoque tres F E, A E, D E; ſi igitur circa tria puncta data A F D, deſcribatur circulus, ejus centrum E, erit in recta C B, ac proinde & Sphæræ quæſitæ centrum & Sphæra ipſa non latebunt.

PROBLEMA II.

Datis tribus punctis & plano invenire ſphæram quæ per data puncta tranſeat, & planum datum contingat.

Dentur tria puncta N O M, per quæ circulus deſcriptus M E O N, erit ad ſuperficiem Sphæricam quæſitam ex jam demonſtratis, & in excitatâ ad planum circuli rectâ I B A, invenietur centrum Sphæræ quam quærimus; concurrat recta I B A, cum



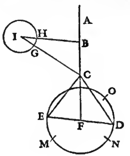
plano dato in puncto A, dabitur igitur punctum A, poſitione à centro circuli N E O M, demittatur perpendicularis in planum datum I D, dabitur igitur punctum D, ideoque & recta A D, poſitione & magnitudine, & pariter rectæ I D, & I A, dabitur igi-

tur planum trianguli A D I positione, datur autem & planum circuli M O N, positione, ergo communis illorum planorum sectio F I E, dabitur positione, ideoque dabuntur puncta E & F, in circulo. Sit factum & centrum sphæræ quæsitæ punctum B. Jungantur rectæ B E, B F, & rectæ I D, parallela ducatur B C, cum triangulum A D I, & recta E I F, sint in eodem plano, ergo rectæ E B, B F, B C, erunt in eodem plano, sed recta I D, est perpendicularis ad planum datum, ergo recta B C, ipsi parallela, est etiam perpendicularis ad planum datum; cum igitur sphæra describenda planum A D, datum contingere debeat, ergo ab ipsius centro demissa in planum perpendicularis B C, dabit punctum contactus C, rectæ igitur B C, B E, B F, erunt æquales & probatum est eas esse in eodem plano positione dato, in quo & recta A D. Eò itaque deducta est quæstio ut datis duobus punctis E & F, & rectâ A D, in eodem plano, quæratur circulus qui per data duo puncta transeat & rectam datam contingat, cui problemati satisfecit Apollonius Gallus, dabitur igitur centrum sphæræ B, & omnia constabunt.

PROBLEMA III.

Datis tribus punctis & sphærâ invenire Sphæram quæ per data puncta transeat & sphæram datam contingat.

Dentur tria puncta M, N, O, & sphæra I G, datur circulus M O N, in sphæra quæsitâ, ad planum circuli erecta perpendicularis F C B, ut supra continebit centrum sphæræ quam quærimus, à centro I, sphæræ datæ demittatur in rectam F B, perpendicularis I B, quæ dabitur positione & magnitudine, à centro F, ipsi parallela ducatur E D, quæ erit ex jam demonstratis in plano circuli, & dabuntur puncta E & D, sit factum, & centrum sphæræ quæsitæ C, ergo rectæ I C, C E, C D, erunt in eodem plano quod & datum est, cum dentur puncta I, E, D. Contactus autem duarum sphærarum est in rectâ ipsarum centra connectente, ergo tanget sphæra quæsita sphæram datam in puncto G, recta igitur I C, superabit rectas C E, C D, radio I G, centro I, intervallo radij sphærici dati describatur circulus in plano dato rectarum I C, C E, E D, transibit igitur per punctum G, & circulus ille positione & magnitudine dabitur sed & puncta E & D in eodem plano. Eò itaque deducta est quæstio ut ex Appollonio Gallo quæratur methodus quâ datis duobus punctis & circulo in eodem plano, inveniatur circulus qui per data duo puncta transeat & circulum datum contingat.

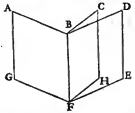


PROBLEMA IV.

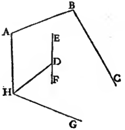
Datis quatuor planis invenire ſphæram quæ data quatuor plana contingat.

DEntur quatuor plana A H, A B, B C, H G quæ à ſphærâ quæſitâ contingi oporteat.

Sint duo plana A F, F D quæ ab eadem ſphærâ contingantur, biſecetur ipſorum inclinatio per planum B F H C, patet centrum ſphæræ quæ duo plana A F, F D contingit eſſe in plano biſecante, ut videatur inutile in re tam proclivi diutiùs immorari, ſi pla-



na A F, F D, eſſent parallela ſphæræ, centrum eſſet in plano ipſis parallelo, & intervallum ipſorum biſecante, hoc poſito propter plana C B, B A, poſitione data quod nempe datorum C B, B A, planorum inclinationem datam biſecat. Sed propter duo plana B A, A H, eſt idem centrum ſphæræ quæſitæ ad aliud planum poſitione datum; ergo communis ſectio duorum planorum poſitione datorum, quorum alterum incli-

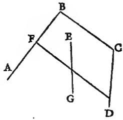


nationem planorum C B, B A, alterum inclinationem planorum B A, A H, bisecat, dabit rectam positione datam, in quâ inveniendæ sphæræ centrum erit. Sit illa recta F E, sed propter duo plana A H, H G, est etiam centrum sphæræ quæsitæ ad aliud planum positione datum cujus concursus cum recta F E, positione datâ dabit punctum D, quod patet esse sphæræ quæsitæ centrum, & reliqua constabunt.

PROBLEMA V.

Datis tribus planis & puncto invenire sphæram quæ per punctum datum transeat & plana data contingat.

Sint data tria plana A B, B C, C D, & punctum H, quærenda sphæra quæ data tria plana contingens transeat per punctum H. Sit factum; tria plana data ex præcedentis propositionis ratiocinio dabunt rectam positione datam quæ sedes erit centri sphærici quæsiti. Sit illa G E, in quam à puncto dato H demittatur perpendicularis

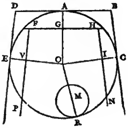


H I, quæ & positione & magnitudine dabitur, producatur ad F, ut sit I F, æqualis I H, dabitur punctum F, cum autem sphæræ quæsitæ centrum sit in recta G E, ad quam ducta est perpendicularis H F bifariam secta in I, cujus unum ex extremis H est ad superficiem sphæricam ex hypothesi, erit & alterius extremum F, etiam ad sphæricam superficiem. Imò & circulus centro I, intervallo I H, descriptus in plano recto ad rectam G E erit ad superficiem sphæræ; datur autem ille circulus positione & magnitudine, dato autem circulo sphærico positione & magnitudine & aliquo plano ut A B. Datur ex facili propositionis secundæ hujus consectario sphæra ad cujus superficiem sit circulus datus & quæ planum datum contingat, deducta est itaque quæstio ad secundam hujus, nec reliqua latebunt.

PROBLEMA. VI.

Datis tribus planis, & ſphærâ, invenire ſphæram quæ datam ſphæram & plana data contingat.

DEntur tria plana E D, D B, B C, & ſphæra R M, conſtruenda eſt ſphæra quæ datam ſphæram & tria pariter plana contingat. Sit factum & ſphæra E R C H, ſatisfaciat propoſito ſphæram nempe in puncto R.

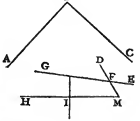


Et plana in punctis E, A, C, contingens, ſphæræ, E R C H, centrum ſit O, junctæ R O, EO, A O, C O, erunt æquales, ſed & recta O R, tranſibit per datæ ſphæræ centrum M, & rectæ E O, O A, O C, erunt perpendiculares ad plana data D E, D B, B C. Fiant rectæ O M, æquales rectæ O V, O G, O I, & per puncta V G I intelligantur duci plana V P, GH, I N, datis E D, D B, B C, parallela, cum recta O R, æqualis ſit O E, & ablata O M, ablatæ O V, erit reliqua R M, reliquæ V E, æqualis, datur autem magnitudine R M, cum ſit radius ſphæræ datæ; datur igitur & V E magnitudine; cum autem OE, ſit perpendicularis ad planum D E, erit etiam perpend. ad planum P V, plano D E, parallelum, recta igitur VE, erit intervallum planorum D E, & PV, ſed datur V E magnitudine ex demonſtratis, ergo datur planorum D E, P V, intervallum; ſunt autem parallela hæc duo plana, & datur D E poſitione ex hypotheſi; datur igitur & P V, poſitione. Similiter probabitur plana G H, I N, dari poſitione & rectas O V, O G, O I, ad ipſa eſſe perpendiculares & æquales rectæ O M, ſphæra igitur centro O, intervallo O M, deſcripta plana P V, G H, I N, poſitione data contingit. Datur autem punctum M, cum ſit centrum ſphæræ datæ. Eò itaque deducta eſt quæſtio ut datis tribus planis P V, G H, I N, & puncto M. inveniatur ſphæra quæ per datum punctum M, tranſeat & data plana P V, G H, I N, contingat, hoc eſt deducitur quæſtio ad præcedentem, nec abſimili in ſequentibus artificio cum nulla in datis puncta teperientur, ſed ſphæræ tantùm aut plana, in locum unius ex ſphæris punctum datum ſubſtituetur.

PROBLEMA VII.

Datis duobus punctis & duobus planis invenire Sphæram quæ per data puncta transeat & plana data contingat.

DEntur duo plana A B , B C , & duo puncta H M. quærenda sphæra quæ per puncta H & M transeat & plana A B, B C, contingat. Jungatur recta H M, & bisecetur



in I, punctum I, dabitur, per punctum I, trajiciatur planum ad rectam HM, rectum, cum Sphærica superficies puncta H, M, contineat, certum est centrum Sphæræ esse in plano ad rectam H M, normali, & per punctum I, transeunte, datur autem hoc planum positione cum recta HM, & punctum I. Sint data positione, ergo centrum sphæræ propter puncta H & M, est ad planum datum. Sed & propter plana A B , B C , ut jam superiùs demonstravimus, est ad aliud planum datum, ergo est ad rectam positione datam , sit illa G E, in quam demissa ab uno ex punctis datis M, recta M F, dabitur positione & magnitudine & continuata in D , ut sit F D , æqualis M F , erit punctum D , datum & ex superius demonstratis erit etiam ad sphæricam superficiem, dantur itaque tria puncta H M D, per quæ sphæra quæsita transit , datur etiam planum A B , quod ab eadem sphærâ contingi debet ; deducta est itaque quæstio ad problema secundum hujus.

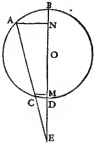
Priusquam progrediamur ulterius , præmittenda lemmata quædam facillima.

LEMMA I.

SIT circulus B C D , extra quem sumpto quolibet puncto E , trajiciatur per centrum recta E D , O B , ducatur quælibet E C B , patet ex elementis rectangulum A E C , æquari rectangulo B E D. Sit jam sphæra circa centrum O , cujus maximus circulus sit A C D B , si ab eodem puncto E per quodlibet punctum superficiei sphæricæ trajiciatur recta E C A , donec sphæræ ex altera parte occurrat , rectangulum A E C , erit similiter æquale rectangulo B E D , si enim intelligatur circa rectam immobilem B D E ,

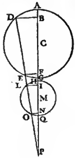
conuerti

converti, & circulus & recta E C A, simul non immutabuntur rectæ E C, & E A, cum puncta C, & A, circulos describant ad axem rectos, nec idcirco rectangulum A E C, erit itaque in quocumque plano æquale rectangulo B E D.



LEMMA II.

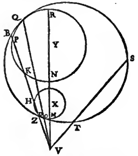
Sint duo circuli in eodem plano A D E, H L O, per centra ipsorum trajiciatur recta A C M P, & fiat ut radius A C ad radium H M, ita recta C P, ad rectam M P, & à puncto P, ducatur ad libitum recta P O L E D, ambos circulos secans in punctis O E L D; demonstravit Apollonius Gallus rectangula A P Q, G P H esse æqualia & ipsorum cuilibet æquari rectangula D P O, E P L. In sphæricis idem quoque verum esse sequentium problematum interest, patet autem ex eo quod si circa axem A P immobilem tam circuli duo quàm recta P O L E D, eodem tempore convertantur, non immutabuntur rectæ P O, P L, P E, P D, propter allatam in superiori lemmate rationem nec idcirco rectangula, & in quocumque plano constabit propositum.



L.

LEMMA III.

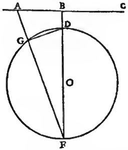
Sint duæ ſphæræ datæ Y N , X M per quarum centra trajiciatur recta R Y N X M V, & fiat ut radius Y N ad radium X M , ita recta Y V , ad rectam V X , à puncto V ducatur in quolibet plano recta V T S , & ſit rectangulum S V T æquale rectangulo R V M , ſi deſcribatur ſphæra quævis quæ per puncta T S , tranſeat & unam ex duabus datis contingat , alteram quoque continget. Sit enim ſphæra O T S , per puncta T & S deſcripta & ſphæram M X , in puncto O , contingens, aio ſphæram Y N, etiam à ſphæra O T S contactam iri, producatur recta V O, donec ſphæræ O T S, occurrat in Q, re-



ctangulum igitur Q V O ex primo lemmate eſt æquale S V T , ſed rectângulum SVT ex conſtructione eſt æquale rectangulo R V M , cui ex ſecundo lemmate eſt æquale rectangulum ſub V O , & rectâ per puncta V & O ad ſuperficiem ſphæricam ſphæræ Y N, productâ , ergo punctum Q eſt ad ſuperficiem ſphæræ Y N , commune igitur eſt & ſuperficiei ſphæræ Y N , & ſuperficiei ſphæræ O T S. Aio has duas ſphæras in puncto eodem Q , ſe contingere, ducatur enim à puncto V , quælibet recta in quolibet plano ſphæræ OTS, & ſit verbi gratia VZ, quæ producta ſecet ſphæras tres in punctis Z D H K P B , rectangulum Z V B in ſphæra O T S , per primum & ſecundum lemma eſt æquale D V P rectangulo, ſphæris duabus X M , & Y N , terminato. Sed D V , eſt major recta V Z , cum enim ſphærâ O T S , tangat exteriùs ſphæram X M in puncto O, recta ſecans ſphæram O T S , prius ipſi occurret quàm ſphæræ X M. Cum ergo probatum ſit rectangulum D V P , æquari rectangulo Z V B , & recta Z V , ſit minor recta D V, ergo recta PV erit minor rectâ BV, punctũ igitur B extra ſphæram Y N cadet. Simili ratiocinio concludetur omnia puncta ſphæræ ambientis exteriùs cadere, præter punctum Q , tangit igitur ſphæra O T S , ſphæram Y N quod erat demonſtrandum , nec abſimilis aut difficilior in contactibus interioribus, & in omnibus caſibus demonſtratio.

LEMMA IV.

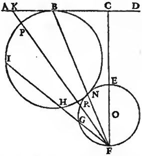
Sit planum A C, & ſphæra D G F , cujus centrum O , per centrum O, ducatur F O D B perpendicularis ad planum & à puncto F ducatur recta quævis ad planum ſphæram ſecans in G , & planum in A. Aio rectangulum A F G , æquari rectangulo B F D, nam ſecetur ſphæra ad planum datum, per planum trianguli A B F , & fiat circulus G F D in ſphærà, in plano autem recta A B C , cum recta F B , ſit perpendicularis ad



planum A C, erit etiam perpendicularis ad rectam A C, habens igitur circulum DGF, & rectam A C in eodem plano, & rectam F D B per centrum circuli transeuntem ad A C perpendicularem jungatur G D, anguli ad G, & ad B, sunt recti, ergo quadrilaterum A B D G, est in circulo, ideoque rectangulum A F G æquale est rectangulo BFD, quod etiam in quavis alia sphæræ sectione similiter demonstrabitur.

LEMMA V.

SIT planum A B D, & sphæra E G F, cujus centrum O, per centrum O trajiciatur recta F O E C perpendicularis ad planum, & in quovis alio puncto ducatur recta F H I, sitque rectangulum I F H æquale rectangulo C F E. Si per puncta I H, describatur



sphæra quæ planum A C contingat, eadem sphæra tanget sphæram E G F, intelligatur construi sphæra I H B, quæ per puncta I & H, transiens tangat planum A C, in puncto B I, aio sphæram E G F contingi à sphæra I H B, jungatur recta F B & rectangulo C F E, fiat æquale rectangulum B F N, punctum N, per præcedentem erit ad superfi-

ciem sphæræ E G F, sed & rectangulum C F E, ex constructione est æquale rectangulo I F H, rectangula igitur I F H, B F N, sunt æqualia; ideoque punctum N, est etiam ad superficiem sphæræ I BH. Probandum jam sphæram E G F, à sphæra I BH, in puncto N contingi, quod quidem facile est, à puncto enim F, per quodlibet punctum sphæræ E G F, ducatur recta F R, quæ sphæram I B H, in H & P, & planum A C in K secet, rectangulum K F R ex præcedente lemmate æquatur rectangulo C F E, cui ex constructione æquatur rectangulum D F H, ideoque P F H rectangula, igitur K F R, & P F H sunt æqualia, sed recta K F est major recta F P, quia sphæra I B H, tangit planum A C in B, ergo recta F R est minor recta F H, punctum igitur R est extra sphæram I B H. Idem de quocumque alio puncto in quovis plano sphæræ E G F, ex utraque puncti N parte probabitur; manifestum itaque sphæram E G F, à sphærâ I B H, in puncto N contingi.

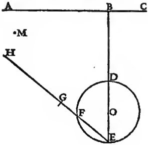
Hæc lemmata licet sint facilia, pulcherrima tamen sunt, tertium præsertim & quintum, in tertio quippe infinitæ sunt sphæræ quæ per puncta T & S transeuntes sphæram X M, contingunt, sed omnes illæ in infinitum tangent quoque ex demonstratis sphæram Y N, in quinto autem lemmate infinitæ sunt sphæræ quæ per puncta I & H transeuntes planum A C contingunt, sed omnes illæ pariter in infinitum sphæram E G F, ex demonstratis contingent.

His suppositis reliqua problemata facilè exequemur.

PROBLEMA VIII.

Datis duobus punctis plano & sphærâ invenire sphæram quæ per data puncta transeat & sphæram ac planum datum contingat.

SIT datum planum A B C, sphæra D F E, & puncta H M, per centrum sphæræ datæ O in planum A B C, datum demittatur perpendicularis E O D B, jungatur H E, & rectangulo B E D, fiat æquale rectangulum H E G; dabitur itaque punctum G, datis tribus punctis H, G & M, & plano A B C, quæratur sphæra per 2. pro-

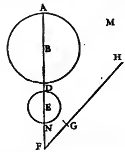


blema hujus, quæ per data tria puncta transeat & planum A B C datum contingat. Sphæra illa satisfaciet proposito, transit quippe per data duo puncta H & M, & planum A B C tangit ex constructione, sed & sphæram D F E contingit, ex quinto lemmate; nam cum rectangulum H E G, æquetur rectangulo B E D, omnis sphæra quæ per data duo H & G puncta transiens planum A B C tangit, sphæram quoque D E F contingit.

PROBLEMA IX.

Datis duobus punctis & duabus sphæris invenire sphæram quæ per data duo puncta transeat & sphæras datas contingat.

Sint datæ duæ sphæræ A B, D E, & puncta data, H & M, trajiciatur recta A F, per centra sphærarum datarum, & ut radius A B ad radium D E, ita fiat recta B F, ad FE,

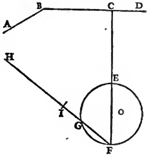


dabitur punctum F, fiat rectangulo N F A, æquale rectangulum H F G, dabitur punctum G. Jam datis tribus M, G, H, punctis & sphæra D N, quæratur sphæra quæ per data tria puncta transeat & sphæram D N datam contingat, cui problemati satisfaciet tertium problema hujus, continget quoque sphæram ex 3. lemmate ideoque proposito satisfaciet.

PROBLEMA X.

Dato puncto, duobus planis, & sphærâ invenire sphæram, quæ per datum punctum transeat & sphæram, ac data duo plana contingat.

Sint duo plana A B, B D, sphæra E G F, punctum H, per punctum O centrum sphæræ datæ in quodlibet ex planis demittatur perpendicularis CEOF, & rectangulo



C F E, fiet æquale rectangulum H F I, datis duobus punctis H, & I, & duobus planis A B, B D. Quæratur per septimum problema hujus sphæra quæ per data duo puncta transeat & duo plana data contingat, continget quoque ex quinto lemmate sphæram, & proposito satisfaciet.

PROBLEMA XI.

Dato puncto, plano, & duabus sphæris invenire sphæram quæ per datum punctum transeat & planum, ac sphæras duas datas contingat.

Deducetur statim quæstio simili præcedentibus ratiocinio ad problema octavum, datis duobus punctis, plano & sphærâ, idque beneficio lemmatis quinti. Quod si libeat uti lemmate tertio deducetur quæstio pariter ad idem problema alio medio & aliâ constructione.

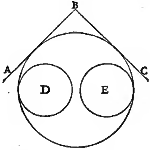
PROBLEMA. XII.

Dato puncto & tribus sphæris, invenire sphæram quæ per datum punctum transeat & sphæras datas contingat.

Huic quoque figuram non assignamus, statim quippe beneficio lemmatis 3. deducetur quæstio ad problema IX. datis duobus punctis, duabus sphæris, &c.

PROBLEMA XIII.

Datis duobus planis & duabus sphæris, invenire sphæram quæ data plana & sphæras contingat.



Sit factum. Si ergo sphæricæ superficiei inventæ imaginemur aliam ejusdem centri superficiem parallelam quæ à quæsitâ distet per radium minoris ex sphæris, tanget hæc nova superficies sphærica plana quæ à datis distabunt per intervallum ejusdem radij minoris ex sphæris, tanget quoque sphæram cujus radius distabit à radio majoris sphæræ datæ per idem radij minoris intervallum, quæque erit majori sphæræ concentrica, dabitur ergo, dabuntur & duo plana datis parallela & per radium minoris ex sphæris ab ipsis distantia, transibit & hæc nova superficies sphærica per centrum minoris ex sphæris datis, quod quidem datum est, pari igitur quo usi jam fumus in Problemate VI. artificio deducetur quæstio ad problema X. dato puncto, duobus planis & sphæra invenire &c.

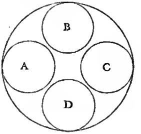
PROBLEMA XIV.

Datis tribus ſphæris & plano invenire ſphæram quæ ſphæras & planum datum contingat.

Simili quâ uſi ſumus viâ in præcedente & VI. Problemate deducetur quæſtio ad Problema XI. dato puncto, plano & duabus ſphæris &c.

PROBLEMA XV.

Datis quatuor ſphæris invenire ſphæram quæ datas contingat.



SIT factum, & quâ uſus eſt methodo Apollonius Gallus ut problema de tribus circulis ad problema de puncto & duobus circulis deduceret, eâdem & ſimili præcedentibus famoſum hoc & nobile problema ad XII. datis tribus ſphæris & puncto deducemus. Conſtabit ex omni parte propoſitum, & illuſtre accedet Apollonio Gallo complementum.

Caſus varios, determinationes, & minuta neglexímus, ne in immenſum excreſceret ſphæricus de contactibus tractatus.

DE

LINEARUM CURVARUM CUM LINEIS RECTIS comparatione

DISSERTATIO GEOMETRICA.

Hæc Dissertatio typis edita fuit anno 1660. occultato Autoris nomine.

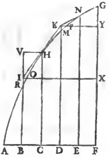
NONDUM, quod sciam, lineam curvam purè Geometricam rectæ datæ Geometræ adæquarunt. Quod enim à subtili illo Mathematico Anglo nuper inventum & demonstratum est cycloidem nempe primariam diametri circuli ipsam generantis esse quadruplam, hoc suam ex sententiâ doctissimorum Geometrarum videtur habere limitationem, ij quippe hanc esse legem & ordinem naturæ pronuntiant ut non sinat inveniri rectam curvæ æqualem, quin priùs supposita fuerit alia recta alteri curvæ æqualis. Quod quidem in exemplo cycloidis ab ipsis allato ita se habere deprehendunt, nec nos diffitemur, cum constet descriptionem cycloidis indigere æqualitate alterius curvæ cum rectâ, hoc est circumferentiæ circuli cycloidem generantis cum rectâ quæ est basis ipsius cycloidis. Sed quàm vera sit hæc, quam statuunt, lex naturæ, & quàm periculosum ab uno aut altero experimento statim ad axioma propetare, infrà patebit. Nos enim curvam verè Geometricam & ad cujus constructionem nulla talis alterius curvæ cum rectâ æqualitas præcessisse supponatur, rectæ datæ æqualem esse demonstrabimus; & paucis, quantùm fieri poterit, totum negotium absolvemus.

PROPOSITIO PRIMA.

SIT in Figura prima curva quævis A H M G in easdem partes curva, exempli causâ, una ex parabolis infinitis in quâ tangentes extra curvam cum base A F & axe F G concurrant, & sumatur in hujusmodi curvâ quodvis punctum H per quod ducatur tangens I H K, in qua sumptis ex utraque parte punctis K & I demittantur perpendiculares I B, K D in basim A F quæ secent curvam in punctis R & M. Aio portio

nem tangentis H I portione curvæ R H esse minorem, portionem autem ejusdem tangentis H K portione curvæ H M esse majorem; Cum enim ex hypothesi tangens K I occurrat basi A F extra curvam, ergo angulus C H I qui fit ab intersectione perpendicularis in basem H C, & tangentis H I erit minor recto, ideoque à puncto H demissa perpendicularis in rectam K I cadet in punctum V supra puncta B R I. Patet itaque rectam H V minorem esse rectâ H I, item rectam H I minorem esse rectâ quæ puncta H & R conjungit; ergo à fortiori recta H I minor erit portione curvæ H R quæ rectam ab H R ad R ductam subtendit; quod primo loco fuit demonstrandum. Aio jam portionem K H portione curvæ H M esse majorem; à puncto K ducatur ad eandem curvam

Figura 1.



tangens K N & demittatur perpendicularis N E. Ex prædemonstratis probatum est rectam K N esse minorem portione curvæ N M: Sed ex Archimede summa tangentium H K, K N est major totâ portione curvæ H N. Ergo portio tangentis H K portione curvæ H M, major erit. Quod secundo loco fuit ostendendum. Nec moveat tangentem à puncto K ultra punctum G, aliquando occurrere curvæ. Hoc enim casu aliud punctum inter K & M sumi poterit, & omnia ad præcedentem demonstrationem aptari. Inde sequitur si à punctis K & I ducantur perpendiculares ad axem curvam in punctis O & P secantes, hoc casu tangentem H I curvâ H O esse majorem, tangentem verò H K curvâ H P esse minorem. Si enim imaginemur inverti figuram ita ut axis in locum baseos, basis in locum axis transferatur, non solum similis in hoc casu, sed eadem omninò erit demonstratio.

Patet autem ex ipsâ constructione, si rectæ B C & C D sint æquales portiones tangentis H I & H K esse item inter se æquales, quod tamen summopere notandum.

PROPOSITIO II.

AD dimensionem linearum curvarum non utimur inscriptis & circumscriptis more Archimedeo, sed circumscriptis tantùm ex portionibus tangentium compositis, duas enim series tangentium exhibemus quarum una major est curvâ, altera minor: demonstrationem autem multò faciliorem & elegantiorem per circumscriptas solas evadere Analystæ experientur.

Possibile igitur, ut vult methodus Archimedea, pronuntiamus cuilibet ex curvis jam prædictis circumscribere duas figuras ex rectis constantes quarum una superet curvam intervallo quovis dato minore, altera autem superetur à curva intervallo etiam dato minore.

Exponatur curva aliqua ex prædictis in 2. Figura. Secetur basis A F in quodlibet portiones æquales, A B, B C, C D, D E, E F, F G, & à punctis B, C, D, E, F, erigantur perpendiculares B Q, C V, D Z, E R, F M, quæ occurrant curvæ in punctis P, T, Y, N, O, Ducantur item tangentes A Q, P V, T Z, Y R, N M, O I. Ex primâ propositione patet tangentem A Q, portione curvæ A P esse majorem: item tangentem P V, portione curvæ P T esse majorem & sic de reliquis, tandemque etiam ultimam O I portione curvæ O H esse majorem. Ergo figura constans ex omnibus istis tangentium A Q, P V, T Z, Y R, N M, O I, portionibus curva ipsa major erit.

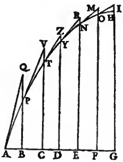


Figure 2.

At exponatur eadem curva in 3. Figura cujus basis A G in eundem portionum æqualium numerum dividatur in punctis B, C, D, E, F. à punctis B, C, D, E, F ut suprà erigantur perpendiculares B R, C Q, D O, E L, F I quæ occurrant curvæ in punctis S, P, N, M, K, à puncto autem S in hac tertia figura, ducatur tangens S T, occurrens perpendiculari A T, deinde à punctis P N, M, K, H ducantur tangentes P R, N Q, M O, K L, H I occurrentes perpendicularibus B S, C P, D N, E M, F K, in punctis R, Q, O, L, I. Ex prima propositione patet tangentem S T portione curvæ A S esse minorem, item tangentem P R portione curvæ P S esse minorem & sic deinceps, tandemque ultimam I H quæ parallela est basi, portione curvæ K H esse minorem. Ergo figura constans ex omnibus istis tangentium S T, P R, N Q, M O, K L, H I portionibus curva ipsa minor erit.

Deest hoc loco figura 3. quam ad calcem libri lector inveniet.

Cum autem ex corollario propositionis primæ partes tangentium ab eodem puncto curvæ utrinque productarum & portionibus basis hinc inde æqualibus oppositarum sint inter se æquales: patet, cum 2. & 3. Figuræ curvæ supponantur æquales aut eadem potius, licet vitandæ confusionis causâ duas figuras descripserimus, tangentem S T tertiæ figuræ æqualem esse tangenti PV secundæ figuræ, cum enim punctum S in tertia figura idem omninò sit cum puncto P secũdæ figuræ & portiones basis AB, BC in utraq; figura sint inter se æquales; portiones tangentium ex utraque parte ipsis oppositarum nempe recta S T in 3. figura & recta P V in 2. inter se æquales erunt. Probabitur similiter tangentem P R 3. figuræ æqualem esse tangenti T Z 2 & sic de cæteris. Quo peracto constabit primam tantùm 2. figuræ & ultimam 3. nulli ex portionibus figuræ contrariæ æquales esse. Excessus igitur quo figura secunda superat tertiam est idem quo tangens A Q 2. figuræ superat tangentem I H 3. figuræ. Sed recta I H propter parallelas æquatur portioni basis F G sive A B, supponuntur enim omnes basis portiones

æquales in utraque figura, ergo figura secunda ex tangentibus curva majoribus composita superat figuram tertiam ex tangentibus curva minoribus compositam eo ipso quo in 2. figura tangens A Q superat portionem basis A B, ipsi oppositam intervallo.

Si igitur velimus duas figuras curvæ circumscribere, alteram majorem curva, alteram verò minorem, quæ se invicem excedant intervallo minore quocumque dato, facillima erit constructio: Cum enim ex methodo tangentium jam cognita detur tangens ad punctum A, dabitur angulus Q A B, sed angulus Q B A est rectus, ergo datur triangulum Q A B, specie, datur itaque ratio rectæ A Q ad A B. Cavendum itaque est ut divisio basis ita instituatur ut differentia rectarum A Q & A B sit minor quacumque recta data, Quod ita assequemur si quæramus duas rectas in data ratione quæ se invicem excedant recta data quæ sit minor eâ quæ data est. Hoc autem problema est facile, & curandum deinde ut portio quælibet basis A B non sit major minore duarum quæ dicto problemati satisfaciunt.

Cum igitur hac ratione invenerimus duas figuras curvæ circumscriptas, alteram majorem, alteram minorem dictâ curvâ quæ se invicem excedunt intervallo minore quocumque dato, à fortiori major ex circumscriptis superabit curvam intervallo adhuc minore, & minor ex circumscriptis superabitur à curva intervallo adhuc minore.

Patet itaque ex nostra hac methodo per duplicem circumscriptionem commodum præberi aditum ad methodum Archimedeam cum agitur de dimensione linearum curvarum. Quod semel monuisse & demonstrasse sufficiet.

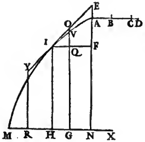
His positis securè pronuntio inveniri posse curvam verè Geometricam datæ rectæ æqualem. Ea verò est una ex infinitis parabolis, quas olim speculati sumus; illa nempe in qua cubi applicatarum ad axem sunt inter se ut quadrata portionum axis, de quo ne dubitent Geometræ ita breviter demonstro.

PROPOSITIO III.

SIT in 4. Figura parabole quam jam indicavimus M I V A cujus vertex A, axis A N, & in qua sumpto quovis puncto I & ductis perpendicularibus seu applicatis ad axem rectis M N, I F, cubus rectæ M N sit ad cubum rectæ I F, ut quadratum rectæ N A ad quadratum rectæ F A, idque semper contingat: probandum est curvam M I A rectæ datæ æqualem esse. Fiat ut quadratum axis A N, ad quadratum applicatæ N M, ita recta N M ad rectam A D ipsi A N perpendicularem. Patet rectam A D esse rectum dictæ parabolæ latus; hoc est solidum sub AD in quadratum rectæ A N æquari cubo applicatæ N M, item sumpto quovis alio puncto ut I, solidum sub A D in quadratum A F æquari cubo applicatæ I F, quod non eget demonstratione, in facilibus enim non immoramur: ducatur tangens ad punctum I, & sit illa IOE quæ cum axe AN in puncto E concurrat. Ex methodo tangentium constat rectam F A, rectæ A E esse duplam, ideóque rectam F E ad rectam A F esse ut 3. ad 2. quadratum verò rectæ E F esse ad quadratum rectæ A F ut 9. ad 4. à recta A D abscindatur nona ipsius pars C D & reliqua CA bisecetur in B, erit igitur D A ad A B ut 9. ad 4. sive ut quadratum E F ad quadratum A F. Solidum itaque sub A D in quadratum A F æquale erit solido sub quadrato F E in rectam A B. Sed solidum sub A D in quadratum A F est æquale cubo rectæ I F, ergò solidum sub rectâ A B in quadratum E F est æquale eidem cubo rectæ I F; est ergo ut quadratum E F ad quadratum I F ita recta I F ad rectam A B, & componendo summa quadratorum E F & F I, hoc est unicum quadratum tangentis I E est ad quadratum I F, ut summa rectarum I F & A B ad A B.

Si autem ducatur à puncto I perpendicularis ad basim recta I H & alia quævis perpendicularis G Q V O occurrens applicatæ I F in Q: curvæ in V & tangenti in O, propter similitudinem triangulorum erit ut I O ad I Q sive ipsi æqualem H G, ita tangens I E ad applicatam I F, & ut quadratum I O ad quadratum H G ita quadratum I E ad quadratum I F.

Ut autem quadratum I E ad quadratum I F, ita ſumma rectæ I F & A B ad rectam A B Ergo quadratum I O ad quadratum H G erit ſemper ut ſumma rectarum I E & A B ad rectam A B : Quod demonſtrare oportuit.



Inde ſequitur ſi rectæ M N ponatur in directum recta N X rectæ A B æqualis, eſſe ſemper ut quadratum tangentis I O ad quadratum rectæ H G, vel ut quadratum tangentis I Y ex altera parte ad quadratum rectæ oppoſitæ R H, utrobique enim propter parallelas eadem eſt ratio, ita rectam H X ad rectam N X. Recta enim H X æqualis eſt ſummæ rectarum I F, & A B, & recta N X eſt æqualis A B. Hoc autem patet ex conſtructione, recta enim H N propter parallelas æqualis eſt rectæ I F, & reliqua N X, facta eſt æqualis rectæ A B.

PROPOSITIO IV.

EXponatur In 5. Figura noſtra hæc parabola A X E cujus ſit ea, ut diximus, natura ut cubi applicatarum ſint inter ſe in ratione quadratorum portionum axis : Sit ejus axis A I, baſis aut ſemibaſis E I ex datis axe A I & applicata I E invenitur, ut superius diximus, rectum latus A D, à quo abſciſſa nonâ ipſius parte C D, & reliqua A C bifariam diviſa in B, ſecetur baſis E I in quotlibet libuerit portiones æquales E F, F G, G H, H I & à punctis F, G, H excitentur perpendiculares F X, G Y, H Z curvæ occurrentes in punctis X, Y, Z. Ad puncta autem E X Y. Z, ducantur tangentes ER, XS, YT, ZV, occurrentes perpendicularibus FX, GY, H Z, I A productis, in punctis R, S, T, V. Ponatur rectæ E I in directu recta IK æqualis rectæ AB, Patet ex præcedente propoſitione & ipſius corollario quadratum tangentis Z V ad quadratum recta H I eſſe ut rectam H K, ad rectam K I. Similiter ut quadratum tangentis Y T ad quadratum rectæ G H ita rectam G K ad rectam K I; item quadratum tangentis X S ad quadratum rectæ F G ut rectam F K ad rectam K I; denique ut quadratum tangentis E R ad quadratum rectæ E F ita rectam E K ad rectam I K : His poſitis à puncto K excitetur K L perpendicularis ad rectam E K, & fiat recta K L æqualis rectæ K I ſive A B : Intelligatur jam per punctum K tanquam verticem, axem autem K E, deſcribi parabole ſimplex ſive Archimedea cujus rectum latus ſit K L, & ſit illa parabola K M Q ad quam excitentur perpendiculares E Q, F P, G O, H N, I M quæ erunt, ut patet applicatæ parabolæ & in directum poſitæ perpendicularibus E X, G Y &c. Quadratum tangentis Z V ut jam diximus eſt ad quadratum rectæ H I ut recta H K ad rectam I K.

Sed ut recta H K ad rectam I K ita singulis in rectam K L ductis rectangulum sub H K in K L ad rectangulum sub I K in K L s rectangulum verò sub H K in K L ex natura parabolæ Archimedeæ æquatur quadrato applicatæ H N, & rectangulum sub I K, in K L æquatur quadrato rectæ K L, cum rectæ I K, K L factæ fuerint æquales: Erit igitur ut quadratum H N ad quadratum K L ita quadratum tangentis Z U ad quadratum rectæ H I, ideòque ut recta H N ad K L ita tangens Z U ad rectam H I. Similiter probabimus esse ut tangentem Y T ad rectam G H ita applicatam G O ad K L: Item ut tangentem X S ad rectam F G ita applicatam F P ad K L, denique ut tangentem ER, ad rectam E F ita esse applicatam E Q ad K L. Cum igitur sit ut tangens Z U ad rectam H I ita applicata HN ad K L, rectangulum sub extremis æquabitur rectangulo sub medijs, ideòque rectangulum sub N H in HI æquabitur rectangulo sub K L in tangentem Z U. Similiter rectangulum sub O G in G H æquabitur rectangulo sub K L in tangentem Y T, item rectangulum sub P F in F G æquabitur rectangulo sub K L in tangentem X S, denique rectangulum sub E Q in E F æquabitur rectangulo sub K L in tangentem E R: Quid autem pluribus in re proclivi & jam ad methodum Archimedeam sponte sua vergente immoramur? Per inscriptas enim & circumscriptas in segmento parabolico figuras, rectangula omnia Q E F, P F G, O G H, N H I segmentum ipsum parabolicum EQ M I designabunt. Omnes autem tangentes ER, X S Y T, Z U per iteratam secundùm nostræ præcepta methodi circumscriptionem curvam ipsam E X Y Z A etiam designabunt: ergo segmentum parabolicum E Q M I æquatur rectangulo sub K L in curvam E X A Datur autem in rectilineis segmentum parabolicum E Q M I, quadravit enim parabolam Archimedes ideòque ipsius segmenta. Ergo rectangulum sub K L in curvam E X A etiam datùr: datur autem recta K L. Ergo datur curva E X A & ipsi alia recta potest constitui æqualis, quod erat demonstrandum.

Si quibusdam tamen hæc demonstratio brevitate nimiâ laborare videatur, eam integram insistendo vestigiis Archimedeis non gravamur separatim adjungere, ut eam legant & examinent qui superiora non sufficere existimabunt. Probandum est segmentum parabolicum E Q M I rectangulo sub datâ K L in curvam E X A æquale esse. Fiat ex Archimede segmentum illud parabolicum E Q M I æquale rectangulo sub datâ rectâ K L in datam rectam B. Si probaverimus rectam B æqualem esse curvæ E X A constabit propositum. Aio itaque rectam B curvæ E X A esse æqualem. Si enim æqualis non est, erit vel major vel minor. Sit primò recta B major quàm curva E X A & sit earum excessus, si fieri possit recta Δ. Ex propositione secundâ hujus possumus curvæ E X A circumscribere figuram ex portionibus tangentium compositam quæ superet curvam intervallo minore rectâ Δ. Fiat igitur illa circumscriptio & in figura separatâ, quam etiam quintam Romano charâctere notauimus, circumscripta illa constet ex portionibus tangentium ER, X S, Y T, Z V, circumscripta illa ex prædemonstratis est major curvâ E X A. Sed & recta B posita est major eâdem curva. Cum ergo circumscripta superet curvam minori intervallo quàm recta B superat eandem curvam: Ergo circumscripta minor est recta B. Rectangulum itaque sub rectâ K L in circumscriptam est minus rectangulo sub K L in rectam B. At rectangulum sub K L in B factum est æquale segmento parabolico E Q M I: Ergo rectangulum sub K L, in circumscriptam est minus dicto segmento parabolico E Q M I. Probavimus autem rectangulum sub K L in portionem tangentis E R æquari rectangulo sub Q E in E F, item rectangulum sub K L in X S æquari rectangulo sub P F in F G, item rectangulum sub K L in Y T æquari rectangulo sub O G in G H, denique rectangulum sub K L in Z V æquari rectangulo sub N H in H I, ergo rectangulum sub K L in totam circumscriptam est æquale summæ rectangulorum sub Q E in E F, sub P F in F G, sub O G in G H & sub N H, in H I. Si autem in rectas F P, G O, H N, I M, quæ sensim decrescunt quò propiùs accedunt ad verticem parabolæ, continuatas demittantur

perpendiculares seu parallelæ basi, à punctis Q, P, O, N rectæ Q Γ, P Θ, O Λ, N Φ. Patet rectangulum Q E F Γ æquale esse rectangulo sub Q E in E F, item rectangulum Θ F, æquari rectangulo sub P F in F G, rectangulum Λ G æquari rectangulo sub O G in G H, denique rectangulum Φ H æquari rectangulo sub N H in H I. Ergo rectangulum sub K L in circumscriptam est æquale rectangulis Θ E, Θ F, Λ G, Φ H. Sed probavimus rectangulum sub K L in circumscriptam esse minus segmento parabolico E Q M I, ergo summa rectangulorum Γ E, Θ F, Λ G, Φ H erit minor dicto segmento parabolico E Q M I, quod est absurdum, illa enim rectangula constituunt figuram ex rectangulis compositam, & segmento parabolico, ut patet, circumscriptam, ideóque ipso segmento majorem. Recta itaque B non est major curvâ E X A. Sed neque minorem esse probabimus. Sit enim recta B minor curvâ E X A, si fieri potest, & curva superet rectam B intervallo Δ. Circumscribatur in figurâ separatâ (quam etiam quintam charactere græco notavimus) figura constans ex portionibus tangentium curvâ E X A minorum; sed quam tamen ipsa curva superet intervallo minore ipso Δ. Et sit illa figura constans ex portionibus tangentium X R, Y S, Z T, A V; Cum itaque curva sit major B intervallo Δ, & eadem curva superet circumscriptam intervallo minore ipso Δ, ergo circumscripta erit major rectâ B, ideoque rectangulum sub K L in circumscriptam erit majus segmento parabolico E Q M I. Sed rectangulum sub K L in circumscriptam æquatur, ex prædemonstratis, rectangulis sub P F, in F E, sub O G, in G F, sub N H in H G & sub M I in I H. Est enim ut X R ad F E ita F P ad K L, ideòque rectangulum sub K L in X R æquatur rectangulo sub P F in F E & sic de reliquis. Cum igitur rectangulum sub K L in circumscriptam sit majus segmento parabolico E Q M I, ergo summa rectangulorum sub P F in F E, sub O G in G F, sub N H in G H & sub M I in H I est major dicto segmento parabolico, sed omnia illa rectangula ductis perpendicularibus seu basi parallelis rectis P Γ, O Θ, N Λ, M Φ quæ omnes cadent in applicatas intra parabolam, prout enim applicatæ magis distant à vertice eò magis semper augentur, erunt æqualia rectangulis P E, O F, N G, M H. Ergo summa omnium illorum rectangulorum P E, O F, N G, M H, erit major segmento parabolico. Quod est absurdum. Rectangula enim illa P E, O F, N G, M H componunt figuram ex rectangulis compositam & ipsi segmento parabolico inscriptam, ideóque ipso minorem. Recta itaque B non est minor curvà E X A. Cum igitur nec sit major, nec minor, erit ipsi curvæ æqualis. Quod prolixiùs, ut omnis removeatur scrupulus, fuit demonstrandum.

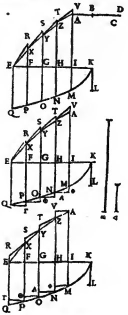


Figura 5.

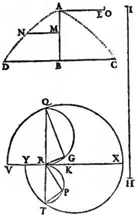
σχῆμα 6.

Ex jam demonstratis patet eâdem facilitate demonstrari posse segmentum parabolicum quodvis E Q P F à priore abscissum, rectangulo sub datâ K L in curvam E X

æquale esse ; Ideóque si detur in basi quodvis punctum ut F, cum ex Archimede segmentum parabolicum E Q P F in rectilineis detur, dari etiam & rectangulum sub K L datâ in portionem curvæ E X ; datur autem recta K L, ergo & curva E X. Dato itaque quovis puncto in basi seu F, dari portionem curvæ ipsi oppositam & rectam posse assignari huic æqualem manifestum est.

Nec moveat ad rectam illam curvæ E X A æqualem inveniendam, construendam videri parabolam simplicem, quo casu problema solidum evaderet. Cùm enim supponatur ad veritatem tantum inquirendam & demonstrationem ritè conficiendam parabolæ illius descriptio ; nihil vetat quominus calculum ipsum dissimulatâ illa imaginaria parabolæ descriptione, per rectas & circulos & expediamus & exhibeamus. Is autem calculus, nisi fallor, talis est. Esto in figurâ sexta, curva parabolica D A C

Figura 6.



ejus naturæ ut cubi applicatarum D B & N M sint inter se ut quadrata portionum axis B A & A M, dentur autem altitudo A B & semibasis B D, aut tota D B C. Aio dari rectam curvæ D A C æqualem (quod jam probatum est) in calculo verè Geometrico. Sit rectum istius parabolæ latus recta A O, quam datam esse ex datis axe & applicata ex suprà dictis constat, à recta A O auferatur nona ipsius pars E O, reliqua verò A E fiat æqualis rectæ Y K, cui in directum ponatur K X æqualis seu applicatæ semibasi D B. Super recta Y X tanquam diametro describatur semicirculus Y T X & rectâ Y K bisectâ in puncto R excitetur perpendicularis R T semicirculum secans in T. Rectæ R T fiat æqualis recta R V & super recta V X tanquam diametro describatur semicirculus V Q X ad cujus circumferentiam à puncto R excitetur perpendicularis R Q. Super rectis T R, R Q describantur semicirculi T P R, R G Q & ipsis applicentur rectæ T P, R G quæ singulæ sint ipsi R Y æquales. Junctis autem rectis R P, Q G : Aio rationem curvæ parabolicæ D A C ad basim D B C esse eamdem quæ est dupli quadrati rectæ Q G ad triplum quadratum rectæ R P ideoque esse datam. Fiat itaque ut triplum quadratum rectæ R P ad duplum quadratum rectæ Q G ita recta D C

ad

ad rectam I H. Recta illa I H quæ data est ex constructione, æqualis erit curvæ parabolicæ DAC. Quod si cum præcedente demonstratione non conveniat, ab ipsa erit emendandum.

Si hæc non sufficiant ad obtinendum à Geometris ut nostra hæc curva parabolica inter admiranda Geometriæ collocetur, illud fortasse ab ipsis quæ mox sequentur impetrabunt. Quid enim mirabilius quàm ex unâ hâc curvâ derivari & formari alias numero infinitas non solum ab ipsâ sed inter se specie differentes quæ tamen singulæ rectis datis æquales esse demonstrentur? Propositio generalis hæc est.

Sit in 7. Figurâ, curva nostra parabolica C M A cujus altitudo A B, semibasis C B

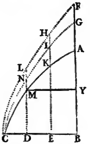


Figura 7.

& ab eâ curvâ formentur aliæ in infinitum hac ratione ut ductis perpendicularibus ad basim rectis D M, N L, E K, I H utcumque, secantibus curvam in punctis M, K, nova curva C N I G ex hac priore formanda sit ejus naturæ ut recta D N sit semper æqualis portioni prioris curvæ nempe C M ipsam respicienti; item recta E I sit æqualis portioni prioris curvæ C M K, & sic in omnibus alijs quibuslibet perpendicularibus. Hæc nova curva C N I G erit diversæ à priore speciei. Formetur pariter ab ipsâ, tertia curva C L H F in qua rectæ D L, E H sint semper æquales portionibus curvis C N & C N I secundæ curvæ. Et à tertiâ pari ratione formetur 4. à quarta quinta, à quinta sexta & eo progrediamur in infinitum ordine. Aio omnes istas curvas C N I G, C L H F & reliquas in infinitum perinde ac primam parabolicam C M K A rectis datis æquales esse.

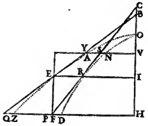
Notandum autem istas omnes in infinitum curvas esse purè Geometricas, nec in illis itaque ad legem illam & ordinem naturæ de quibus initio hujus dissertationis locuti sumus recurrendum. Licet enim rectæ D N & E I curvis C M & C M K supponantur æquales, eædem tamen ipsæ non tam suppositæ sunt quàm ex prædictis demonstratæ esse pariter rectis æquales. Dato quippe quolibet puncto D, cum ex præcedentibus detur recta æqualis portioni curvæ C M; ergo recta D N quæ curvæ C M ex constructione ponitur æqualis, ut recta verè data non ut æqualis curvæ considerari debet, & sic de reliquis. Curva igitur suprà descripta C N I G verè Geometrica est, quam postquam æqualem esse rectæ datæ demonstraverimus sequetur tertiam curvam ab eâ formandam nempe C L H F esse quoque purè Geometricam & sic omnes alias in infinitum.

Demonstratio difficilis non erit si prius præmiserimus generalem quæ huic operi omninò inservit propositionem.

PROPOSITIO VI.

ESto in Fig. 8. quælibet curva ejusdem cum præcedentibus naturæ ONR, cujus vertex O, axis vel applicata OVI, eadem enim semper est demonstratio, & ab eâ

Figura 8.



formetur alia curva OAE cujus ea sit proprietas ut applicatæ sint æquales portionibus abscissis à priore curvâ, exempli gratiâ, applicata VA sit æqualis curvæ ON, applicata IE sit æqualis curvæ OR, & sic de reliquis: Ad datum punctum in novâ hâc curvâ ducetur tangens hoc pacto: Sit datum punctum E, ducatur applicata EI, secans priorem curvam in R, ducatur recta RC tangens in dicto puncto R priorem curvam & occurrens axi in puncto C, fiat ut RC ad CI, ita recta IE ad rectam IB, & jungatur EB. Aio rectam EB tangere novam curvam EAO in puncto E. Sumpto enim quovis puncto in axe ut V, & ducta applicata VNA quæ secet priorem curvam in N, tangentem RC in S, secundam curvam in A, rectam verò EB in Y, si probaverimus rectam VY semper esse majorem applicatâ VA, recta EB non secabit novam curvam à parte verticis. Hoc autem facillimè probamus. Recta VA est æqualis curvæ ON sive differentiæ inter curvas OR, NR: At recta RS est minor curvâ RN per consectarium primæ propositionis, ergo differentia inter curvam OR & rectam RS est major differentia inter eamdem curuam OR, & curvam RN; sed curva VY est æqualis differentiæ inter curvam OR & rectam RS ut mox probabimus ergo recta VY occurrens rectæ EB, erit major rectâ VA occurrente curvæ OAE, unde patet omnia puncta rectæ EB versùs verticem esse extra curuam; ideóque recta EB curvam ab eâ parte non secabit. Imò nec inferiùs. Sumatur enim quodvis punctum ut H à quo ducatur applicata HZ secans priorem curvam in D, tangentem RC productam in F, secundam curvam in Z, & rectam EB productam in Q. Si probemus rectam HQ in quocumque casu majorem esse rectâ HZ, patebit omnia puncta rectæ EB etiam inferiùs sumpta extra curvam jacere, unde patebit dictam rectam EB tangere secundam curvam in dicto puncto E. Recta HZ est æqualis ex constructione curvæ OD, hoc est summæ curvarum OR, RD. Cum autem recta RF sit portio tangentis RE inferiùs sumpta erit ex consectario primæ hujus recta RF major curva RD, ideóque summa curvæ OR & rectæ RF erit major summa, ejusdem curvæ OR & curuæ RD; summa autem curvæ OR & rectæ RF est æqualis, ut mox probabimus, rectæ HQ: summa verò curvarum OR, RD est æqualis rectæ HZ ex constructione, ergo recta HQ semper & in omni casu major erit applicatâ HZ. Ideóque recta EB in dicto puncto E tanget secundam curvam. Probandum

autem reliquimus differentiam curvæ O R & rectæ R S æquari rectæ V Y, ducatur recta E M parallela axi & occurrat rectæ V Y productæ in M. Ex constructione est ut E I ad I B, ita R C ad C I, sed ut E I ad I B, ita Y V ad V B, & ita Y M, ad M E, ut autem R C ad C I, ita R S ad V I, ergo ut Y M ad M E, ita R S ad V I, Sunt autem rectæ M E, V I æquales propter parallelas, ergo rectæ Y M, R S erunt æquales. Sunt autem æquales etiam rectæ E I, V M, ergo differentia inter rectas E I, & M Y erit recta V Y. Sed recta E I ex constructione æquatur curvæ O R, ergo differentia inter curvam O R & rectam M Y sive ipsi æqualem R S æquabitur rectæ Y V. Quod primò erat probandum. Nec dissimili ratiocinio procedet demonstratio infrà applicatam E I, ductâ enim rectâ E P parallelâ axi, probabimus rectam Q P æqualem esse rectæ R F. Est enim ut E I ad I B hoc est Q H ad H B, hoc est, Q P ad P E, ita recta R C ad C I, hoc est, R F ad I H. Sunt autem æquales P E, I H, ergo & rectæ Q P, R F. Recta autem H Q æquatur rectis H P, P Q, quarum prior H P æquatur rectæ I E sive curvæ O R, posterior autem Q P æquatur ex demonstratis rectæ R F. Ergo summa curuæ O R & rectæ R F est æqualis rectæ H Q quod secundo loco fuit probandum. Patet itaque rectam E B in puncto E secundam curvam tangere. Quod erat demonstrandum.

Sit jam in 9. Fig. curva nostra parabolica G K A cujus altitudo A E, semibasis G E, rectum latus A D, cujus nona pars, ut suprà sit C D & recta A G bifariam secetur in

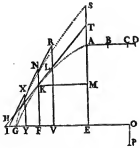


Figura 9.

B: A priori hac curvâ formetur alia versùs punctum G quæ sit G N S occurrens axi prioris in S, & novæ hujus curvæ proprietas hæc sit, ut sumpto quovis puncto ut F, & erectâ perpendiculari F K N occurrente duabus curvis in K & N, recta F N sit semper æqualis curvæ prioris portioni G K. Ducatur parallela basi K M, & ad idem punctum K ducatur recta T K H tangens priorem & occurrens axi in T & basi in H. Per punctum verò N in secundâ curvâ ducatur tangens R N X I occurrens basi in I, & à punctis quibuslibet in eâ ex utraque parte sumptis ut R & X demittantur in basim perpendiculares X Y & R V. Ex præcedentibus patet quadratum tangentis K T in priore curva ad quadratum F E, sive quadratum K L ad quadratum F V, esse semper ut rectam F E unà cùm recta A B ad ipsam A B. Sed ut quadratum K T ad quadratum F E sive ad quadratum K M, ita quadratum K H ad quadratum H F propter parallelas, ergo quadratum K H est ad quadratum H F ut recta F E unà cum A B ad A B. Ut autem quadratum K H, ad quadratum H F, ita ex præcedente propositione quadratum rectæ F N ad quadratum rectæ F I. (Cum enim cætera latera ex vi illius propositionis sint proportionalia, erunt proportionalia & quadrata.) Ergo quadratum N F ad quadratum

F I est ut recta F E unà cum AB ad A B, & componendo quadrata duo N F & F I sive unicum quadratum N I erit ad quadratum F I ut F E unà cum A B bis ad A B. Sed ut quadratum N I ad quadratum F I, ita quadratum R N ad quadratum rectæ F V ex una parte, & ita quadratum rectæ N X ad quadratum rectæ F Y ex altera. Ergo sumpto quovis puncto in secunda hac curva ut N, est semper ut quadratum portionis tangentis ad illud punctum ductæ ex alterutra parte ad quadratum portionis basis ipsi oppositæ, ita summa rectæ F E unà cum A B bis ad A B. Si igitur basi G E ponatur in directum recta E O rectæ A B dupla, & ad punctum O erigatur perpendicularis O P ipsi A B æqualis, erit semper ut quadratum portionis N R in hâc secundâ curvâ ad quadratum portionis basis F V, vel ut quadratum portionis tangentis N X ad quadratum portionis basis F Y, ita recta F O ad rectam O P.

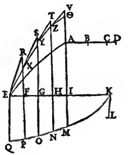
His ita se habentibus, patet cæteras in infinitum curvas modo quem supra indicavimus describendas ejus esse naturæ, ut in 3. v. g. quadratum portionis tangentis ad quadratum portionis basis ipsi oppositæ, sit ut portio basis F E initium sumens à puncto F in quod cadit perpendicularis à puncto contactus in basim demissa, unà cum rectâ A B ter sumptâ ad ipsam A B. In quartâ curvâ erit ut quadratum portionis tangentis ad quadratum portionis basis ipsi oppositæ ut recta F E unà cum A B quater sumpta ad ipsam A B. Et sic de reliquis in infinitum. Eadem enim semper demonstratio, ut evidens est, in omnibus casibus locum habet.

Nec difficilis hoc supposito ad theorema generale erit aditus.

PROPOSITIO VII.

Esto in Fig. 10. curva nostra parabolica E A, cujus axis A I, semibasis I E. ab eâ formetur secunda curva E X Y Z Θ cujus ea sit natura, ut suprà diximus, ut

Figura 10.



quævis applicata F X sit æqualis portioni prioris curvæ ab applicata illa, seu mavis vocare perdendiculatem, abscissæ. Dividatur basis in quotlibet partes æquales E F, F G, G H, H I & ducantur à punctis F, G, H, perpendiculares secantes novam hanc secundam curvam in punctis X, Y, Z. Sit prioris curvæ rectum latus A D, à quo abscindatur nona pars C D, & reliqua A C bisecetur in B. Rectæ A B bis sumptæ fiat æqualis recta I K quæ sit in directum basi, & ad punctum K erigatur perpendicularis K L æqualis rectæ A B. Per punctum K & axem K E intelligatur describi parabola sim-

plex ſivè Archimedea cujus rectum latus K L & ſit illa parabola K M O Q. A punctis E, F, G, H, I ducantur perpendiculares ad axem & occurrentes huic parabolæ in punctis Q, P, O, N, M, Ex corollario præcedentis cum curva E X ⊖ ſit ſecunda curva à priore derivata ſeu formata eâ ratione quam jam ſæpiùs explicuimus; ſequitur ſumpto in ea quolibet puncto ut Y, & ducta portione tangentis Y T eſſe ut quadratum Y T ad quadratum G H, ita rectam K G ad rectam K L: ſed ut recta G K ad rectam K L, ita ſingulis in rectam K L ductis rectangulum C K L ad quadratum K L: Ex natura autem parabolæ ſimplicis rectangulum G K L æquatur quadrato applicatæ G O; ergo quadratum YT eſt ad quadratum GH ut quadratum G O ad quadratum KL, ideóque ut recta YT ad rectam G H ita recta G O ad rectam K L: rectangulum itaque ſub extremis æquatur rectangulo ſub mediis, rectangulum ergo ſub G O, in G H æquatur rectangulo ſub K L in Y T, Si igitur ducantur aliæ tangentes E R, X S & Z V occurrentes perpendicularibus in punctis R, S, V probabitur ſimiliter rectangulum ſub Q E in E F æquari rectangulo ſub K L in E R, item rectangulum ſub P F in F G æquari rectangulo ſub K L in X S & ſiede reliquis in infinitum, unde tandem per abductionem ad methodum Archimedeam pari quod in 4. propoſitione hujus indicavimus artificio, conficietur & concludetur ſegmentum parabolicum E Q M I æquari rectangulo ſub K L in ſecundam curvam E X ⊖ ſicut & ſingula ſegmenta parabolica, E Q P F, verbi gratiâ, rectangulo ſub K L in portionem curvæ E X, vel ſegmentum E Q O G rectangulo ſub K L in portionem curvæ E X Y & ſic in infinitum. Dantur autem in rectilineis hæc omnia ſegmenta parabolica ex vi quadraturæ parabolæ ab Archimede demonſtratæ; & datur etiam recta K L. Ergo dantur tam tota ſecunda curva E X ⊖, quàm ipſius portiones E X, E Y &c. per rectas perpendiculares ad puncta F G data abſciſſæ.

Ad tertiæ curvæ cum rectâ datâ æqualitatem, ſimilis fiet conſtructio, niſi quod recta I K ponetur tripla rectæ A B. In 4. curvâ eadem I K ponetur quadrupla rectæ A B. Et tandem generalis inter omnes iſtas in infinitum curvas a priore derivandas ita ſtatuetur ratio: erunt nempe ſingulæ inter ſe ut ſegmenta parabolica ejuſdem parabolæ, & ejuſdem altitudinis quæ à vertice parabolæ diſtabunt per rectum latus toties ſumptum quot erunt in ordine curvæ inter ſe comparandæ.

Exempli g. ſit in 11. Fig. curva noſtra parabolica E M A. Cujus axis A F, ſemibaſis E F, rectum latus A D, à quo dempta nona parte C D, reliqua A C biſecetur in B Et à prima illa curvâ formetur ſecunda E O S ejus naturæ ut ſumpto quolibet puncto

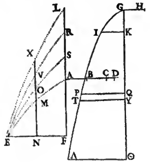


Figura 11.

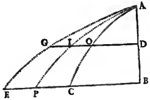
in base N recta N O perpendicularis ad basim & occurrens curvis in M & O, sit æqualis portioni prioris curvæ E M. à secunda formetur tertia E V R in qua recta N V sit æqualis portioni secundæ curvæ E O. Item à tertia E V R formetur quarta E X L, in qua recta N X sit æqualis portioni tertiæ curvæ E V. Exponatur separatim parabola simplex sive Archimedea cujus axis infinitus G K Q Y, vertex G, rectum latus G H æquale rectæ A B. Quæritur ratio verbi gratiâ 4. curvæ E X L ad primam E M A. Quia prior ex istis est 4. ordine, ab axe abscindenda est G Y quadrupla recti lateris G H, deinde ponenda ipsi in directum recta Y Θ æqualis semibasi E F & ducendæ applicatæ rectæ Y T, Θ Δ. Quia verò posterior ex duabus comparandis est prima ordine, abscindenda est ab axe recta G K recto lateri semel tantùm æqualis, deinde ipsi ponenda in directum recta K Q semibasi etiam E F æqualis & ducendæ applicatæ K I, Q P. Erit ex demonstratis & canone generali ab illis deducto, ut segmentum parabolicum Y T Δ Θ ad segmentum parabolicum K I P Q, ita quarta curva E X L ad primam EMA. Sed ratio segmentorum parabolicorum inter se data est ex Archimede, ergo & ratio curvarum inter se data erit; data est autem prima ex demonstratis, datur igitur & quarta, & ipsi rectæ datæ æqualis assignari potest & perpetua illa ratio remota, si libeat, parabola ad phrasim Geometricam ope regulæ tantùm & circini accommodari. Quod autem de totis jam probatum & in canonem deductum est, idem de portionibus illarum curvarum inter se comparandis contingere beneficio segmentorum parabolicorum portiones semibasis ipsis curvarum portionibus oppositas pro altitudine habentium quis non videt?

Nihil autem nec de solidis ex dictis in infinitum curvis, conficiendis, nec de superficiebus ipsorum curvis, nèc de centris gravitatum aut linearum istarum, aut dictorum solidorum, aut superficierum curvarum adjungimus, cum methodi hac de re generales à summis & insignibus Geometris jam vulgatæ ista omnia post cognitam specificam curvæ datæ proprietatem ignorari non sinant, licet in multis casibus propriam ab unoquoque adjungi operi industriam non inutile futurum existimemus.

Sed antequam manum de tabula tollam succurrit examinanda sequens propositio.

Sit in Figura 12. curva nostra parabolica C O A, cujus vertex A, axis A B, semibasis C B. Ab ea formentur aliæ curvæ infinitæ modo quem jam explicuimus, non ex

Figura 12.



parte basis ut suprà, sed ex parte verticis. Sint illæ curvæ à prima effingendæ A I P, A G E &c. in infinitum eâ conditione ut sumpto quovis puncto in axe D & ducta ad axem perpendiculari D O I G secante curvas in punctis O, I, G, recta D I sit in

ſecunda curva ſemper æqualis portioni primæ curvæ A O, item recta D G in tertia curva ſit ſemper æqualis portioni ſecundæ curvæ A I, & ſic in infinitum. Hujuſmodi omnes curvæ non ſolùm ſpecie inter ſe & à prima A O C, different ſed etiam ab ijs quas ex parte baſis ſuprà effinximus. Quæritur ergo an curvæ illæ omnes A I F, A G E &c. ſic in infinitum effingendæ, datis rectis, an verò alijs curvis ſint æquales? Inquirant illud Geometræ, & miraculum augeri experientur.

Sanè ſi methodi quibus utuntur ad dimenſionem curvarum, ſint generales & ſufficientes, quod ipſis affirmantibus in dubium revocare non auſim, primo ſtatim obtutu rem factam habebunt, & a labore ſuperfluo Geometram jam fatigatum liberabunt.

Si quid autem in ſuperioribus demonſtrationibus conciſum nimis invenerint, id aut ſuppleant, rogo, aut condonent.

APPENDIX
AD DISSERTATIONEM
DE LINEARUM CURVARUM
cum lineis rectis comparatione.

Vt ultimæ quam in Dissertatione proposuimus quæstioni satisfiat, præmittendæ videntur propositiones sequentes.

PROPOSITIO PRIMA.

SINT in figurâ primâ duæ curvæ A I F, 3 Z 8 quarum axes A E, 37 sint inter se æquales. Ducantur autem ad axes applicatæ quotlibet quæ in utrâque figurâ æquali à vertice intervallo distent. Sint exempli gratiâ applicatæ prioris B M, C I, D H, E F: posterioris verò applicatæ sint 4 t, 5 2, 6 9, 7 8, & sit recta A B quæ designat intervallum applicatæ B M à vertice, æqualis recta 43 quæ designat intervallum etiam applicatæ 4 t à vertice. Sit pariter CA æqualis 53. Item D A æqualis 63, denique E A, quod jam suppofueramus, æqualis 73 Si singulæ ex applicatis sint semper ad abscissas per tangentes ab axe, in ratione correlatarum, hoc est si ductis tangentibus ad puncta F, H, I, M, ex unâ parte, & ad puncta 8, 9, Z, T, ex alterâ semper contingat ut applicata F E, verbi gratia, sit ad rectam K E quam tangens F K abscindit ab axe, in eadem ratione, quæ est applicatæ 8 7 ad rectam 7 2 quam tangens 82 ab axe pariter abscindit. Item applicata D H sit ad abscissam ab axe per tangentem quæ ducitur ad punctum H ut applicata 69 ad abscissam ab axe per tangentem ad punctum 9. ductam & sic de reliquis. Aio duas istas curvas A F, 3 z 8. esse inter se æquales, imò & similes ideóque easdem, & applicatas unius figuræ applicatis alterius quæ à vertice æqualiter distant esse pariter æquales. Ductis enim ad puncta H, I, ut in primâ figurâ portionibus tangentium HO. I N, M R, quæ occurrant applicatis in punctis O, N, R. Item ductis portionibus tangentium in secundâ figurâ 9 V, Z Y, T X quæ occurrant applicatis in punctis V, Y, X: ex suppositione ut F E ad E K in primâ figurâ, ita est 87 ad 7 2 in secundâ: sed anguli ad puncta E & 7 sunt recti, ergo triangula F E K, 8 7 2 sunt similia: ut ergo F K ad K E, ita 8 2 ad 72. Sed ut F K ad K E ita (productâ applicatâ D H ad punctum G) recta F G ad rectam D E, & ut 82 ad 72 ita (productâ applicata 69 ad punctum P) recta 8 P ad 67. Ergo ut recta F G ad rectam D E, ita recta 8 P ad 67. Sunt autem rectæ DF.

67, æquales, cùm rectæ E A & 73, item rectæ D A & 63 sint inter se æquales: ergo & portiones tangentium FG, 8 P erunt inter se æquales. Similiter probabimus portionem tangentis H O æqualem esse portioni tangentis 9 V, item portionem tangentis I N æqualem esse portioni tangentis Z Y, denique portionem tangentis M R æqualem esse portioni tangentis T X. Cum ergo series tangentium in primâ figurâ sit æqualis seriei tangentium in secundâ per abductionem ad impossibile more Archimedeo facilè concluditur curvam A I F, curvæ 3 Z 8 æqualem esse, quod primo loco fuit probandum, imò & pariter concluditur portiones curvæ correlatas esse inter se æquales, portionem nempè F H portioni 89, portionem curvæ H I portioni 9 Z, & sic de reliquis. Superest probandum applicatas pariter unius figuræ applicatis alterius esse æquales. Cum ex suppositione applicatæ sint semper ad abscissas ab axe per tangentes in eâdem utrobique ratione, ergo anguli G F E, P 8 7 qui fiunt ab intersectione tangentium & applicatarum erunt inter se æquales: Item anguli O H D, & V 9 6: Item anguli N I C, & Y Z 5 1 Denique anguli R M B, & X T 4. Cum ergo portiones omnes prioris curvæ F H, H I, I M, M A, sint æquales portionibus posterioris 8 9, 9 Z, Z T, T 3 singulæ singulis, imò & earumdem portionum sit eadem utrobique inclinatio (inclinationem enim curvarum metiuntur tangentes quæ in utrâque figurâ æquales semper, ut probavimus, conficiunt angulos) ergo curvæ A M I H F, 3 T Z 98, non solùm sunt inter se æquales, sed etiam similes: Undè si intelligantr altera alteri superponi, congruent omninò, ideòque non solùm axes sed applicatas æquales aut easdem potius habebunt. Quod secundo loco fuit demonstrandum.

PROPOSITIO II.

Sint duæ in secundâ figurâ parabolæ ejusdem naturæ A O D, X I G, quarum axes sint A C, X F, semibases D C, G F, & sit verbi gratia ut cubus D C ad cubum Figura 2.
applicatæ B O, ita quadratum C A ad quadratum B A: & similiter ut cubus G F ad cubum applicatæ I Y, ita quadratum F X ad quadratum I X. (Licèt enim propositio sit generalis à parabolâ nostrâ non discedimus) sit autem ut axis unius ad semibasem, ita etiam axis alterius ad semibasem nempè ut axis C A ad semibasem D C, ita axis X F ad semibasem G F. Aio duas hasce parabolas esse inter se in ratione axium, vel semibasium, hoc est curvam A O D esse ad curvam X I G ut est axis A C ad axem X F, vel ut semibasis C D ad semibasem G F. Hæ quippe duæ rationes ex suppositione sunt eædem. Demonstratio est in promptu. Secetur enim uterque axis in quotlibet partes æquales, duas tantùm ad vitandam confusionem & prolixitatem assumemus. Secetur ergo bifariam axis A C, in B, & axis F X in Y, & ductis applicatis B O, Y I ducantur ad puncta D, O, tangentes DN, OM quarum prior occurrat applicatæ BO in puncto E, posterior verò rectæ A V applicatis parallelæ in puncto V. Item in altera figura ducantur ad puncta G, I, tangentes G K, I S, occurrentes applicatæ Y I & ipsi parallelæ X R in punctis H, R: ex suppositione est ut D C ad C A, ita G F ad F X. Sed ex natura istius paraboles recta C A est ad C N abscissam per tangentem ut 2. ad 3. Item recta F X est etiam ad rectam F K per tangentem abscissam ut 2. ad 3. Ergo ex æquo est ut D C ad C N ita G F ad F K. Sunt ergo æquiangula triangula D N C, G K F. Ergo ut D N, ad N C, ita G K ad K F. Sed ut D N ad N C, ita D E ad C B, & ut G K ad K F, ita G H ad F Y. Ergo ut D E ad C B, ita G H ad F Y. Similiter probabitur esse ut O V ad B A, ita I R ad X Y. Cum ergo portiones axium A B, B C ex una parte, & X Y, Y F ex altera sint inter se æquales, ergo ut omnes tangentium portiones D E, O V ad totum axem A C, ita omnes tangentium portiones G H, I R ad totum axem X F. Omnes autem portiones tangentium D E, & O V & plures, si opus sit, beneficio abductionis ad impossibile ut iam sæpiùs & indicatum & probatum est designant totam curvam D O A: Item omnes portiones tangentium G H, I R & plures etiam, si opus

sit, designant totam curvam G I X. Ergo ut curva D O A ad axem A C, ita curva G I X ad axem X F: Et vicissim & convertendo, erit axis A C ad axem X F: sive basis D C ex suppositione ad basim G F, ut curva D O A ad curvam G I X. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO III.

Figura 3. ESto in 3. Figura curva A O cujus axis A C, basis C O, & ab ea intelligatur formari alia curva ejusdem & axis & verticis in quâ applicatæ sint semper in ratione applicatarum prioris curvæ, sit nempè ut basis C O, ad basim C V, ita applicata B P prioris curvæ, ad applicatam B R posterioris curvæ, & ita applicata D E ad applicatam D N & sic in infinitum. Si ad punctum quodlibet prioris curvæ ut O ducatur tangens O H cum axe conveniens in puncto H, & continuetur C O, donec occurrat secundæ curvæ in V. Aio rectam quæ puncta V & H conjungit tangere secundam curvam, & semper contingere ut taugentes correlatæ in utraque curva ad idem punctum axi occurrant. Ducantur enim applicatæ B P R, D E N, occurrentes curvis in punctis P, R, E, N, & rectis O H, V H productis, in punctis Q, S, F, M. Si probaverimus rectam B S supra rectam C V ductam semper majorem esse rectâ B R: item rectam D M inferiùs ductam esse etiam semper majorem applicatâ D N, patebit rectam M V S H tangere secundam curvam in puncto V. Ex constructione ut C O ad C V, ita est applicata B P ad applicatam B R. Sed propter parallelas C O V, B Q S quæ secantur à tribus rectis C H, O H, V H ad idem punctum vergentibus, est etiam ut C O ad C V ita recta B Q ad rectam B S, ergo ut recta B P ad rectam B R, ita est recta B Q ad rectam B S, & vicissim ut recta B P ad rectam B Q, ita est recta B R ad rectam B S. Cùm autem recta O Q H tangat priorem curvam in puncto O, recta B Q erit major recta B P, ergo etiam recta B S erit major recta B R. Quod primo loco fuit probandum. Nec dissimilis in applicata inferiùs sumpta erit demonstratio. Ex suppositione enim est ut C O ad C V, ita D E ad D N, & propter parallelas est etiam ut C O ad C V, ita D F ad D M, ergo ut D E ad D N ita est D F ad D M: est autem D E minor D F, ergo & D N ipsa D M minor erit. Recta itaque M V S H in puncto V tangit secundam curvam.

Lemma ad id quod sequitur.

Figura 4. SIT in 4. figura, parabole nostra G I A cujus axis A E, semibasis E F G tangens G H. Constituatur ad eumdem axem A E alia parabole ejusdem naturæ F N A cujus semibasis E F sit potestate subdupla prioris semibasis E G, & semper contingat applicatam quamvis, ut N O, applicatæ O I ad priorem curvam esse pariter potestate subduplam, Sit rectum prioris G I A paraboles latus recta A D, cujus nona pars sit C D, & reliqua A C bisecetur in B. Ducatur ad secundam parabolen tangens ad punctum F recta F H. quæ in eodem puncto H cum axe conveniet non solùm ex vi propositionis præcedentis, sed quia ex natura istarum parabolarum, in utraque, recta E A est ad rectam E H ut 2 ad 3. ex superiùs demonstratis. Aio quadratum F E esse ad quadratum E H ut est dimidia rectæ A B ad rectam E G. Jam enim in propositione tertiæ dissertationis demonstratum est quadratum G E esse ad quadratum E H ut est recta A B ad rectam E G. Ergo sumptis antecedentium dimidiis erit ut quadratum E F quod supposuimus esse dimidium quadrati G E, ad quadratum E H, ita dimidia rectæ A B ad rectam G E. Probabimus pariter si recta F E sit potestate subtripla rectæ G E, hoc est si quadratum F E sit subtriplum quadrati G E, esse ut quadratum F E ad quadratum E H, ita tertiam partem rectæ A B ad rectam G E. Et sic de subquadruplo subquintuplo & reliquis in infinitum. Cum autem in ratione subdupla probaverimus esse ut quadratum E F ad quadratum E H ita dimidiam A B ad rectam G E,

ergo componendo erit ut ſumma quadratorum F E, E H, ſive ut unicum quadratum F H ad quadratum E H, ita dimidia A B unà cum G E, ad ipſam G E.

Si verò recta E F ſit poteſtate ſubtripla rectæ G E, erit ut quadratum F H ad quadratum E H, ita tertia pars A B unà cum G E ad ipſam G E.

Si recta E F ſit poteſtate ſubquadrupla rectæ G E, erit ut quadratum F H ad quadratum E H, ita quarta pars A B unà cum E G ad ipſam E G, & ſic in infinitum, & in quacumque applicata idem continget.

PROPOSITIO .IV.

HIS præmiſſis theorema generale haud difficulter detegimus.

Sit in figura 5. parabole noſtra A C cujus axis A B, ſemibaſis B C, & ab ea *Figura 5.* formentur aliæ in infinitum curvæ A D, A E, A F quarum ea ſit proprietas ut ducta qualibet applicata B C D E F, recta B D ſit ſemper æqualis priori curvæ C A, recta B E æqualis ſecundæ curvæ A D, recta B F æqualis tertiæ curvæ A E, idque ſemper in omnibus ad illas curvas applicatis contingat. Aio omnes illas & ſingulas in infinitum curvas A D, A E, A F &c. eſſe ſemper datis lineis rectis æquales, perinde ac curvas quas in diſſertatione, diverſa & diſſimili ex parte baſis methodo conſtruximus.

Theorema generale ita ſe habet. Exponatur ſeparatim eadem parabole O 3 M æqualis omninò & ſimilis ipſi A C, cujus ideo axis M N æqualis eſt axi A B, & ſemibaſis O N, ſemibaſi B C. Separatim enim ad vitandam confuſionem figuram conſtruendam duximus. Fiat recta N P rectæ N M poteſtate dupla, recta N Q ejuſdem N M poteſtate *Figura 6.* tripla, recta N R ejuſdem N M poteſtate quadrupla, & ſic in infinitum. Manente autem eadem ſemibaſi O N, conſtruatur parabole per vertices P, Q, R ejuſdem cum parabola O 3 M vel A C naturæ, & ſint illæ O 4 P, O 5 Q, O 6 R &c. Aio parabolam O 4 P curvæ A D eſſe æqualem; parabolam verò O 5 Q curvæ A E eſſe æqualem, denique parabolam O 6 R curvæ A F eſſe æqualem, & ſic in infinitum. Cum in noſtris parabolis O 4 P, O 5 Q, O 6 R ducta applicata a 3 4 5 6, ſit ſemper ex natura dictarum parabolarum ut cubus rectæ O N ad cubum rectæ 4 2 ita quadratum rectæ ſive axis N P ad quadratum P 2: item ut cubus O N ad cubum 5 2 ita quadratum N Q ad quadratum Q 2: denique ut cubus O N ad cubum 6 a ita quadratum N R ad quadratum R 2. Patet ex prædemonſtratis in diſſertatione, ſingulas ex iſtis parabolis, rectis datis æquales eſſe, ergo poſt demonſtrationem theorematis noſtri generalis conſtabit ſingulas quoque ex curvis A D, A E, A F rectis datis æquales eſſe.

Demonſtratio autem theorematis generalis hæc eſt. Sit rectum paraboles iſtius latus recta A S, à qua ſi demas nonam partem S Y, reliquam biſeca in puncto V & ad puncta C, D, E ducantur tangentes ad novas curvas C I, D H, E G quæ occurrant axi in punctis I, H, G. Ex demonſtratis in tertia diſſertationis propoſitione quadratum B C eſt ad quadratum BI ut recta A V ad rectam B C. Et componendo quadratum C I eſt ad quadratum B I ut recta A V unà cum B C ad B C. Sed ex propoſitione ſexta Diſſertationis, ut eſt quadratum tangentis C I ad quadratum B I, ita quadratum rectæ B D ſe habet ad quadratum rectæ B H, quam abſcindit tangens D H: Ergo ut quadratum B D ad quadratum B H, ita recta A V una cum B C ad B C: Et componendo ut quadratum tangentis D H ad quadratum B H, ita recta A V unà cum B C bis ſumptâ ad ipſam B C. Sed ut quadratum tangentis D H, ad quadratum H B, ita ex eadem diſſertationis propoſitione quadratum B E eſt ad quadratum rectæ B G à tangente E G abſciſſæ: ergo ut quadratum rectæ B E ad quadratum rectæ B G, ita eſt recta A V unà cum B C bis ſumpta; ad ipſam B C. Similiter probabitur ſi ducatur ad curvam E A applicata Z T K, ſecans curvam A C in T, & intelligatur ad punctum K duci, tangens ad curvam AK E, eſſe pariter ut quadratum KZ ad quadratum rectæ, quam

tangens per punctum K ducta ab axe abſcindit, ita rectam A V unà cum Z T bis ſumpta ad ipſam Z T. Et ſic ſemper continget.

Exponatur ſeparatim ad vitandam confuſionem eadem curva A K E, quæ ſit in figura ſeparata Β Φ Α. Baſis Α Δ ſit itaque æqualis baſi E B, tangens Α Γ tangenti E G, axis Δ Β axi B A; abſciſſa per tangentem ab axe Δ Γ, abſciſſæ B G; applicata Ν Φ, applicatæ Z K. A B hac curva Α Φ Β formetur alia ipſa minor Θ Π Β, ea conditione ut applicatæ novæ iſtius curvæ ſint ſemper ſubduplæ poteſtate applicatarum prioris, verbi gratiâ recta Δ Θ ſit ſubdupla poteſtate rectæ Δ Α, item applicata Ν Π ſit ſubdupla poteſtate rectæ Ν Φ; & ſic de reliquis. Ducantur in hac nova curva tangentes ad puncta Θ, Π rectæ Θ Γ, Π 7. Ex præcedente tertia propoſitione patet tangentes Θ Γ, Α Γ, ad idem punctum Γ cum axe concurrere. Item tangentes ad puncta Φ, Π ductas ad idem etiam punctum, verbi gratiâ, 7 cum axe concurrere, cùm applicatæ utriuſque figuræ ſint in eadem ſemper inter ſe ratione.

Exponatur adhuc ſeparatim parabole ejuſdem cum parabolis O M, O P &c. naturæ, cujus axi 9 8 ſit æqualis axi M N, ſive AB ſive Β Δ; ſemibaſis autem 8 X ſit ſubdupla poteſtate ſemibaſeos N O, ſive B C. Et ſit illa X 11 9, à qua formetur alia 9 12 Ψ, cujus idem ſit axis 9 8, applicata verò 8 Ψ ſit æqualis curvæ X 11 9: item applicata 10 11 12 ſit æqualis curvæ 11 9; & ſic de reliquis.

Probandum primò curvas Θ Π Β & Ψ 12 9, eſſe eaſdem, hoc eſt omninò æquales, & ſimiles. Quod ſic demonſtrabitur. Probavimus quadratum B E eſſe ad quadratum B G, ſive quadratum Α Δ ad quadratum Δ Γ, ut rectam A V unà cum C B bis ſumpta ad rectam C B: Ergo ſumptis antecedentium dimidiis, cum poſuerimus rectam Θ Δ eſſe poteſtate ſubduplam rectæ Δ Α, quadratum rectæ Θ Δ erit dimidium quadrati Α Δ, ideóque ut quadratum Θ Δ ad quadratum Δ Γ, ita dimidia A V unà cum C B erit ad ipſam C B. Similiter probabimus in alia qualibet applicata ut Π Ν, eſſe quadratum Π Ν ad quadratum Ν 7 ut dimidiam A V unà cum Z T ad ipſam Z T; & ſic de reliquis. Diſquirendum jam an eadem proprietas curvæ Ψ 12 9 conveniat: quod ita fiet. In curva X 11 9 cujus ſemibaſis X 8 eſt poteſtate ſubdupla ſemibaſis B C, & axis 8 9 æqualis axi A B, ex lemmate ſuperiori ductis tangentibus ad puncta X, Ψ rectis X Ρ, Ψ Σ quadratum X 8 eſt ad quadratum 8 Ρ ut dimidia rectæ A V ad rectam C B (recta enim X 8 eſt poteſtate ſubdupla rectæ C B) Ergo componendo quadratum X Ρ eſt ad quadratum 8 Ρ, ut dimidia A V unà cum C B ad ipſam C B. Similiter ſi intelligatur recta 9 10 æqualis rectæ A Z, hoc eſt ſi puncta 10 & Z æqualiter à vertice diſtent, quadratum tangentis ad punctum 11 ductæ erit ad quadratum abſciſſæ ab axe, ut dimidia A V unà cum recta Z T ad ipſam Z T. Sed ut quadratum X Ρ ad quadratum 8 Ρ, ita ex propoſitione ſexta diſſertationis eſt quadratum applicatæ Ψ 8 ad quadratum à tangente abciſſæ 8 Σ, & ſimiliter ut quadratum tangentis ad punctum 11 ductæ ad quadratum abciſſæ ab axe, ita quadratum applicatæ 12 10 ad quadratum abſciſſæ ab axe per tangentem ad punctum 12 ductam: Ergo ut quadratum Ψ 8 ad quadratum 8 Σ, ita dimidia A V unà cum B C ad B C. Sed in alia figura probavimus quadratum applicatæ Θ Δ eſſe ad quadratum abſciſſæ à tangente Δ Γ, ut eſt dimidia A V unà cum B C ad C B. Ergo in duabus curvis Ψ 12 9, Θ Π Β erit ut Ψ 8 ad abſciſſam 8 Σ, ita applicata Θ Δ ad abſciſſam Δ Γ. Et in omnibus aliis punctis idem ſemper continget, & eodem modo probabimus, nempe applicatam, verbi gratiâ, 10 12. eſſe ad abſciſſam à tangente ad punctum 12 ducta, ut eſt Π Ν ad Ν 7, & ſic de reliquis. Per primam itaque propoſitionem hujus appendicis cum curvæ 9 12 Ψ, Θ Π Β, habeant eumdem axem & applicatæ ſint ad abſciſſas ab axe per tangentes, utrobique in eadem correlatarum ratione, illæ curvæ erunt inter ſe æquales, & ipſæ etiam ipſarum ſemibaſes, & omnes ſimiliter applicatæ à vertice æquidiſtantes. Ex conſtructione autem ſemibaſis Ψ 8 eſt æqualis curvæ X 11 9: Ergo curva X 11 9 eſt æqualis rectæ Θ Δ Recta autem Θ Δ eſt poteſtate ſubdupla rectæ Δ Α ex con-

ſtructione : Ergo curva parabolica X 11 9 eſt poteſtate ſubdupla rectæ δλ : recta autem δλ eſt æqualis rectæ B E, & recta B E ſuppoſita eſt in conſtructione curvarum à primaria A C derivatarum æqualis eſſe curvæ A D : Ergo parabola X 11 9 eſt ſubdupla poteſtate curvæ A D. Sed eadem curva X 11 9 eſt ſubdupla poteſtate parabolæ O 4 P ; baſis enim X 8 eſt facta poteſtate ſubdupla baſeos B C ſive N O, & ſimiliter axis 8 9 ſive A B, ſive N M eſt poteſtate ſubduplus axis N P : Cum ergo parabolæ O 4 P, X 11 9 ſint ejuſdem naturæ, & tam axis quàm baſis parabolæ X 11 9 ſint poteſtate ſubduplæ axis & baſis parabolæ O 4 P : Ergo & ipſa parabola X 11 9 ex propoſitione ſecunda hujus appendicis erit ſubdupla parabolæ O 4 P Cum ergo ut iam probavimus eadem parabola X 11 9 ſit ſubdupla tam parabolæ O 4 P, quàm curvæ A D ; curva A D, & ipſa parabola O 4 P erunt inter ſe æquales ; quod erat demonſtrandum. Nec diſſimili ad probandum curvam A E æqualem eſſe parabolæ O 5 Q, utendum artificio.

Cum enim quadratum B E eſſe ad quadratum B G ut eſt recta A V unà cum B C bis ſumpta ad ipſam B C, probatum fuerit ; ergo componendo & ulteriùs progrediendo erit quadratum tangentis E G ad quadratum rectæ B G, ut recta A V unà cum B C ter ſumpta ad ipſam B C. Eſt autem ex prædemonſtratis in ſexta propoſitione diſſertationis ut quadratum F G ad quadratum B G, ita quadratum B F, ad quadratum abſciſſæ ab axe per tangentem ad punctum F ductam : Ergo quadratum B F erit ad quadratum illius abſciſſæ ut eſt recta A V unà cum B C ter ad B C. In reliquis imitabimur omninò & ſequemur veſtigia demonſtrationis præcedentis, niſi quod in figura ſeparata poſtquàm ΛΔ fuerit facta æqualis ipſi, B F, recta Δδ fiet ſubtripla poteſtate ipſius B F vel ΔΛ ; curva ΛθΒ curvæ F A fiet æqualis ; curva θπβ ejus erit naturæ ut omnes applicatæ ſequantur rationem baſium ΛΔ θδ. In alia autem figura ſeparata in qua curvæ 9 11 X & 9 12 Ψ, recta 9 8 erit æqualis ut ſuprà, rectæ N M, vel A B, vel ΒΔ, baſis verò 8 X fiet ſubtripla poteſtate baſis O N vel C B. Et fiet X 11 9 parabola ejuſdem cum parabolis C T A, vel O 3 M naturæ à qua cum formabitur curva Ψ 12 9 cujus applicatæ 8 Ψ, 10 12 ſint, ut ſuprà, æquales curvis X 9, 11 9. Probabimus, ut ſuprà, curvam βπθ, & curvam 9 11 X eſſe inter ſe æquales, & ſimiles, hoc eſt eaſdem. Unde concluditur baſes θΔ, & Ψ 8 eſſe æquales, ideoque baſem Ψ 8 ſive curvam 9 11 X eſſe poteſtate ſubtriplam rectæ δλ, ſive B F, ſive curvæ A E. Eſt autem etiam ex prædemonſtratis parabola X 11 9 ſubtripla poteſtate parabolæ O 5 Q ; Ergo curva AE & parabola O 5 Q erunt inter ſe æquales. Eodem ratiocinio in ulterioribus caſibus utemur, & generalem noſtri theorematis veritatem evincemus.

Qui autem ſuperiorem diſſertationem & hanc ad ipſam appendicem accuratiùs legerint, præcipua methodi noſtræ fundamenta ſtatim agnoſcent, & ex eis deduci facillimam curvarum dimenſionem deprehendent.

DE SOLUTIONE PROBLEMATUM Geometricorum per curvas simplicissimas, & unicuique problematum generi propriè convenientes.

DISSERTATIO TRIPERTITA.

PARS I.

VT constet Cartesium in Geometricis etiam hominem esse, quod paradoxum meritò forsan quis dixerit, videant subtiliores Cartesiani an mendum contineat linearum curvarum in certas classes aut gradus Cartesiana distributio, & an probabilior & commodior secundùm veras analyseos Geometricæ leges debeat assignari. Quod sine dispendio famæ tanti & tam celebris viri executuros nos censemus, cum Cartesii & Cartesianorum omnium intersit veritatem cujus fautores se non immeritò jactant acerrimos, licèt ipsorum placitis aliquantisper adversetur, omnibus aut (si generale hoc nimis) Geometris saltem & Analystis fieri manifestam.

Problematum Geometricorum in certas classes distributio, non solùm veteribus, sed & recentioribus necessaria visa est Analystis. Proponatur videlicet A + D æquari B, aut A quadratum + B in A æquari Z plano. Hæ duæ æquationes quarum prior radicem aut latus ignotum suis terminis non excedit, posterior autem lateris ignoti secundam potestatem sive quadratum continet, primum & simplicius problematum genus constituunt. Ea verò sunt problemata quæ plana Geometris dici consueverunt. Secundum problematum genus illud est in quo quantitas ignota ad tertiam vel ad quartam potestatem, hoc est ad cubum vel ad quadratoquadratum pertingit. Ratio autem cur duæ potestates proximæ licèt diversi gradus sint, unum tamen tantùm constituant problematum genus, hæc est, quod æquationes quadraticæ reducuntur ad simplices aut laterales facili, quæ & veteribus & novis cognita est, methodo, ideoque per regulam & circinum nullo negotio resolvuntur. Æquationes autem quarti gradus sive quadratoquadraticæ reducuntur ad æquationes tertij gradus sive cubicas beneficio novæ, quam Vieta & Cartesius prodiderunt, methodi. Huic enim operi Vieta subtilem illam & sibi peculiarem climacticam parapleronsin destinavit, ut apud eum videre est cap. 6. libelli de emendatione æquationum, nec absimili in pari casu usus est artificio Cartesius ,licèt aliis verbis illud enunciet.

Similiter quoque cubocubicam æquationem ad quadratocubicam sive æquatio-

nem ſexti gradus ad æquationem quinti deprimet, licèt aliquanto difficiliùs, Vietæus aut Carteſianus Analyſta. Ex eo autem quòd in prædictis caſibus, in quibus una tantùm ignota quantitas invenitur æquationes graduum parium ad æquationes graduum imparium proximè minorum deprimuntur, idem omnino contingere in æquationibus in quibus duæ ignotæ quantitates reperiuntur confidenter pronunciavit Carteſius paginâ 323. Geometriæ linguâ Gallicâ ab ipſo conſcriptæ. Hujuſmodi verò ſunt æquationes omnes linearum curvarum conſtitutivæ, in his enim non ſolùm prædicta reductio vel depreſſio non ſuccedet, ut Carteſius affirmabat, ſed eam omnino impoſſibilem Analyſtæ experientur. Proponatur v. g. æquatio paraboles quadratoquadraticæ conſtitutiva in qua A quadratoquadratum æquatur Z ſolido in E, qua ratione æquatio hæc quarti gradus deprimetur ad tertium? quo utentur remedio climacticæ parapleroſeos artifices?

Quantitatibus autem ignotis characteres vocalium juxta Vietam aſſignamus, hæc enim levia & prorſus arbitraria cur immutarit Carteſius non video.

Ut autem pareat diſquiſitionem hanc aut animadverſionem non eſſe otioſam & inutilem, ſuppetit methodus univerſalis quâ problemata quæcumque ad certum curvarum gradum reducimus.

Proponatur namque problema in quo quantitas ignota ad tertiam vel ad quartam poteſtatem aſcendat, illud per ſectiones conicas quæ ſunt ſecundi gradus expediemus; ſed ſi æquatio ad quintam vel ad ſextam poteſtatem aſcendat, tunc ſolutionem per curvas tertij gradus poſſumus exhibere: ſi æquatio ad ſeptimam vel ad octavam poteſtatem aſcendat, ſolutionem per curvas quarti gradus exhibebimus, & ſic uniformi in infinitum methodo. Unde evidens fit non hic de nomine tantùm, ſed de re agitari quæſtionem. Proponatur in exemplum A cubocubus + B planoſolidum in A æquari Z ſolido ſolido Aut, ſi velis, A quadratocubus + B planoplanum in A æquari Z plano ſolido, in utroque hoc caſu problema ſolvemus per curvas tertij gradus ſeu cubicas, quod & fecit Carteſius. Sed ſi proponatur A quadratocubocubus + B planoplanoſolidum in A æquari Z planoſolido ſolido. Aut A quadratoquadratocubus + B ſolido ſolido in A æquari Z plano planoſolido, tunc problema ſolvemus per curvas quarti gradus ſeu quadratoquadraticas quod nec fecit nec fieri poſſe exiſtimavit Carteſius, cum in hoc caſu ad curvas quinti vel ſexti gradus neceſſariò recurrendum crediderit. Puriorem certe Geometriam offendit qui ad ſolutionem cujuſvis problematis curvas compoſitas nimis & graduum elatiorum aſſumit, omiſſis propriis & ſimplicioribus, cum jam ſæpe & à Pappo, & à recentioribus determinatum ſit non leve in Geometria peccatum eſſe quando problema ex improprio ſolvitur genere. Quod ne accidat, corrigendus eſt Carteſius & ſingula problemata ſuis hoc eſt propriis & naturalibus ſedibus reſtituenda: ſed & pag. 322. idem Carteſius diſertè aſſerit curvas ex interſectione regulæ & alterius aut rectæ aut curvæ oriundas eſſe ſemper elatioris gradus aut generis, quàm eſt recta aut curva in figura pag. 321. ex qua derivantur. Intelligatur, ſi placet in locum ipſius rectæ C N K in dicta figura pag. 321. ſubſtitui parabolam cubicam cujus vertex ſit punctum K & axis indefinitus K L B A & cætera conſtruantur ad mentem Carteſii. Patet æquationem dictæ parabolæ cubicæ conſtitutivam eſſe ſequentem A cub. ex una parte, & B quad. in E ex altera. experiere autem ſtatim curvam E C ex hujuſmodi poſitione provenientem ad æquationem tantùm quadratoquadraticam aſcendere, ergo curva quadratoquadratica eſt elatioris gradus aut generis, quàm curva cubica ſecundùm prædictam Carteſij definitionem, cum tamen contrarium pag. 323. expreſſe idem Carteſius definierit, curvam nempe quadratoquadraticam & curvam cubicam eſſe unius & ejuſdem gradus aut generis. Methodum autem noſtram qua omnia in infinitum problemata, ea nempe quorum æquationes tertiam & quartam poteſtatem

continent, ad ſecundum curvarum gradum : quæ quintam & ſextam poteſtatem, ad tertium : quæ ſeptimam & octavam, ad quartum reducimus, & eo in infinitum ordine exhibere non differemus quotieſcumque id voluerint quibus piaculum videtur errores quoſcumque vel etiam Carteſianos in præjudicium veritatis diſſimulare.

Nec moveat problemata quæ ad ſecundam poteſtatem aſcendunt & quæ ejuſdem cum problematis primi gradus ſint ſpeciei & plana dicuntur, circulis hoc eſt curvis ſecundi gradus indigere ; ſuum enim & proprium ; huic objectioni reſponſum non deerit cum methodum noſtram generalem omnia omnino problemata per curvas convenientes abſolventem proferemus.

DISSERTATIONIS
PARS II.

UT datæ publicè fidei ſatisfiat, methodum generalem ad ſolvenda quæcumque problemata per curvas proprias & convenientes exhibemus. Prædictum eſt jam in prima diſſertationis parte problemata duorum graduum inter ſe proximorum 3^{i} verbi gratia & 4^{i}. 5^{i}. & 6^{i} 7^{i}. & 8^{i}. 9^{i}. & 10^{i}. &c. unicum tantùm curvarum gradum reſpicere, problemata nempe quæ ad tertiam vel quartam poteſtatem aſcendunt, ſolvi per curvas 2^{i}. gradus : ea verò quæ ad quintam vel ad ſextam poteſtatem aſcendunt ſolvi per curvas 3^{i}. gradus &c. in infinitum.

Modus autem operandi talis eſt. Data quævis æquatio in qua unica tantùm reperitur ignota quantitas reducatur 1°. ad gradum elatiorem ſive parem : deinde ab adfectione ſub latere omnino liberetur, quo peracto remanebit æquatio inter quantitatem cognitam vel homogeneum datum ex una parte, & aliquod homogeneum incognitum cujus ſingula membra à quadrato lateris incogniti adficientur ex una parte, ex altera homogeneum iſtud incognitum æquetur quadrato cujus latus effingendum eo artificio ut in æquatione ipſius quadrati cum homogeneo incognito elatiores quantum fieri poterit lateris ignoti gradus evaneſcant. Cavendum etiam ut ſingula lateris quadratici ſic effingendi homogenea à radice vel latere ignoto adficiantur, & ultimum tandem ex illis à ſecundâ etiam radice incognita adficiatur. Orientur tandem beneficio diviſionis ſimplicis ex una parte, & extractionis lateris quadrati ex altera, duæ æquationes linearum curvarum problemati dato convenientium conſtitutivæ, & earum interſectio ſolutionem problematis exhibebit ea qua dudum uſi ſumus in ſolutione problematum per locos methodo.

Exemplum proponatur, ſi placet, A cub. cub. + B in A qu. cub. + Z. plan. in A quad. quad. + D ſolid. in A cub. + M. plan. plan. in A quad. æquari N. ſol. ſol. problemata quippe omnia quæ ad quintam vel ad ſextam poteſtatem aſcendunt ad hanc formam reduci poſſunt. Nihil enim hoc aliud eſt quàm vel quintam poteſtatem ad ſextam evehere vel eam deinde ab ultima adfectione ſub A vel latere liberare, quæ omnia & Vieta & Carteſius abundè docuerunt.

Effingatur itaque quadratum à latere A cub. + B in A in E & æquetur priori primum illius æquationis parti. Fiet itaque A cub. cub. + B in A qu. qu. in E bis + B qu. in A qu. in E qu. æquale A cub. cub. + B in A qu. cub. + Z pl. in A qu. qu. + D ſol. in A cub. + M pl. pl. in A qu. & deleto utrinque A cub. cub. & reliquis per A qu. diviſis quod ex cautione adjectâ methodo ſemper liberum eſt, remanebit æquatio inter B in A cub. + Z planum in A qu. + D ſol. in A + M pl. pl. ex una parte, & B in A qu. in E bis + B qu. in E qu. ex altera. Hæc autem æquatio, ut patet, dat curvam 3^{i}. gradus.

Quia autem ut conſtituatur duplicata æqualitas & commodè ad ſolutionem problematis deveniatur, æquandum etiam eſt quadratum à latere A cub. + B in A in E poſteriori

tiori prioris æquationis parti,hoc eſt N ſol. ſol.ergo per extractionem lateris quadrati, latus quadratum N ſol.ſol.quod facilè datur & dicatur,ſi placet N ſol. æquabitur A cub. + B in A in E, quod eſt latus quadrati prioris æquationis primum datæ parti æqualis.Habemus igitur hanc ſecundam æquationem inter ſol. N & A cub. + B in A in E quæ dabit pariter curvam tertii gradus. Quis deinde non videt interſectionem duarum curvarum jam inventatum dare valorem ipſius A , hoc eſt problematis propoſiti ſolutionem ?

Si problema ad ſeptimam vel ad octavam poteſtatem aſcendat ſtatuetur primò ſub forma octavæ poteſtatis, deinde ab adfectione ſub latere omnino liberabitur hoc pacto. Eſto itaque poſt legitimam ex jam præſcripta methodo reductionem, A qu. cub. cub. + B in A qu. qu. cub. + D pl. in A cub. cub. + N ſol. in A qu. cub. + M pl. pl. in A qu. qu. + G pl. ſol. in A cub. + R ſol. ſol. in A qu. æquale Z pl. ſol. ſol.

Effingetur latus quadrati cuilibet iſtius æquationis parti æquandi à latere A qu. qu. + B $\frac{1}{2}$ in A cub. + D pl. in A in E.

Secundum autem hujus lateris quadratici homogeneum eo artificio effinximus ut duæ elatiores lateris vel radicis A poteſtates in æquatione omnino evaneſcant , quod perfacile eſt. Quadratum igitur illius lateris ſi æques priori æquationis propoſitæ parti, deletis communibus & reliquis per A qu. diviſis,orietur æquatio curvæ 4^{i}.gradus conſtitutiva ex una parte.

Deinde poſt extractionem lateris quadrati ex altera æquationis primùm propoſitæ parte latus Z pl. ſol. ſol. quod P pl. pl. dicere licet, æquabitur A qu. qu. + B $\frac{1}{2}$ in A cub. + D pl. in A in E, hæc verò æquatio dabit etiam aliam 4^{i}. gradus curvam,& harum duarum curvarum interſectio dabit valorem A,hoc eſt problematis propoſiti ſolutionem.

Notandum porro in problematibus quæ ad nonam aut decimam poteſtatem aſcendunt, ita effingendum latus quadrati ut in eo ſint quatuor ad minus homogena quorum beneficio evaneſcant tres elatiores lateris ignoti gradus. In problematibus autem quæ ad undecimam aut duodecimam poteſtatem aſcendunt latus effingendi quadrati conſtare debere quinque ad minus homogeneis , ita formandis ut eorum beneficio quatuor elatiores lateris ignoti gradus evaneſcant. Perpetuâ autem & facillimâ methodo , hæc lateris quadrati effingendi forma per ſolam & ſimplicem diviſionem vel applicationem ut verbis geometricis & in re purè geometricâ utamur expediri Analyſtæ experiendo deprehendent, & characterum + & − variatio nullum methodo præjudicium eſt allatura.

Cum autem problemata quæ ad ſecundam poteſtatem aſcendunt per extractionem lateris quadrati reducantur pura , ut notum eſt, per lineas primi gradus,hoc eſt rectas, expedientur , & vana evadet quam in priore diſſertationis iſtius parte metueramus objectio cùm extractionem radicis quadratæ tanquam notam & obviam in quolibet problematum genere ex noſtra methodo uſurpandam ſuppoſuerimus.

Non latebit igitur deinceps accurata & ſimpliciſſima problematum Geometricorum per locos proprios a curvis variæ, prout expedit,ſpeciei oriundos, reſolutio & conſtructio. Variare autem curvas ſalvo ſemper & retento naturali problematis genere , liberum erit Analyſtis, & ſemper problemata 8^{i}. aut 7^{i}. gradus per curvas 4^{i}. problemata 10^{i}. aut 9^{i}. per curvas 5^{i}. problemata 12^{i}. & 11^{i}. per curvas 6^{i}.& ſic uniformi in infinitum methodo expedientur. Cum contra per Carteſium problemata 8^{i}. aut 7^{i}. gradus curvis 5^{i}. aut 6^{i}. indigeant : problemata 10^{i}. aut 9^{i}. curvis 7^{i}. aut 8^{i}. problemata 12^{i}. aut 11^{i}. curvis 9^{i}. aut 10^{i}. & ſic in infinitum , quod quàm longe à ſimplicitate & veritate geometricâ abſit, videant ipſi Carteſiani, aut ſi ita viſum fuerit , contradicant.

Veritatem enim tantùm inquirimus , & ſi in ſcriptis tanti viri alicubi deliteſcat , eam libenti ſtatim animo & amplectemur & agnoſcemus. Tanta me ſanè , ut verbis alienis utar, hujus portentoſiſſimi ingenii inceſſit admiratio , ut pluris faciam Carteſium errantem quam multos κατορθοῦντας.

DISSERTATIONIS

PARS III.

HÆc ad generalem Doctrinam fortasse sufficiant, quæ enim problemata Cartesius per gradus curvarum elatiores determinat expedienda, ea nos generali methodo ad curvarum gradum duplo minorem feliciter depressimus. Quod ita tamen intelligi debere pronunciamus, ut id saltem auxilium omnes omnino quæstiones admittant. Majus quippe infiniti casus speciales non recusant, juvat itaque ulterius expatiari & Analysin Cartesianam non solùm ad terminos duplo minores, sed ad quadruplo, sexcuplo, decuplo, centuplo &c. in infinitum aliquando minores deprimere ut tantò magis error Cartesianus detegatur & proprium statim ab Analysi remedium consequatur: potestates autem per numeros ipsarum exponentes designare in gradibus elatioribus, deinceps commodiùs erit.

Proponatur invenire sex continuè proportionales inter duas datas. Sint duæ datæ B & D, prima inveniendarum ponatur A, fiet æquatio inter A^7 & $B^6 D$. Hæc æquatio secundùm Cartesium per curvas 5^i tantùm aut 6^i gradus solvi potest. Nos eam per curvas 4^i gradus in secundâ hujus dissertationis parte sicut reliquas etiam ejusdem naturæ generaliter resolvimus. Sed nihil vetat quominùs eam per curvas 3^i gradus resolvamus. Æquentur quippe singuli æquationis termini homogeneo sequenti $A^4 E^2 D$, æquabitur ex una parte A^7 & divisis omnibus per A^4 manebit æquatio inter $E^2 D$ & A^3 quæ dat, ut patet, curvam 3^i gradus. Ex altera verò parte $A^4 E^2 D$ æquabitur $B^6 D$, & omnibus per D divisis & reliquis subquadraticè depressis, manebit æquatio inter $A^2 E$ & B^3 quæ dabit etiam curvam 3^i gradus. Harum autem duarum curvarum intersectio dabit valorem A, hoc est problematis propositi per curvas 3^i gradus solutionem.

Sed proponatur inter duas datas invenire duodecim medias proportionales continuè, æquatio erit inter A^{13} & $B^{12} D$, eam autem Cartesius solvi tantùm per curvas 11^i. aut 12^i. gradus solvi posse existimavit. Nos generaliter ut similes quasvis ejusdem gradus eam in secunda hujus dissertationis parte per curvas 7^i gradus solvi posse docuimus. Sed ulteriùs inquirenti occurrit statim elegans per curvas 5^i gradus solutio, imò & datur per curvas 4^i, ut infra videre est: æquentur primùm singula hujus æquationis membra homogeneo $A^8 E^4 D$, ex una parte nempe A^{13}, & ex altera $B^{12} D$, in prima omnibus per A^8 divisis, fiet æquatio inter A^5 & $E^4 D$ quæ dat curvam 5^i. gradus ut patet. In secunda omnibus per D divisis & per quartam potestatem sive quadratoquadratum depressis, remanebit æquatio inter $A^2 E$ & B^3 quæ dat curvam 3^i gradus. Per duas itaque curvas quarum una est 5^i. gradus, altera 3^i. problema propositum expedimus.

Sed idem etiam problema faciliùs, hoc est, per curvas 4^i. gradus construere possimus; æquentur singula æquationis membra $A^9 E^3 D$ fiet illinc post divisionem per A^9 A^4 æquale $E^3 D$, quæ æquatio dat curvam 4^i. gradus, istinc vero omnibus per D divisis, & deinde per tertiam potestatem sive cubum depressis fiet æquatio inter $A^3 E$ & B^4 quæ dabit etiam curvam 4^i. gradus. Problema itaque per duas 4^i. gradus curvas facillimè construimus.

Qui hæc exempla viderit, non poterit dubitare quin inventio trigesima mediarum continuè proportionalium per curvas 7^i, imò & per curvas 6^i. possit expediri. Æquatio nempe inter A^{31} & $B^{30} D$ communi termino $A^{24} E^6 D$ æquabitur, unde problema per curvas 7^i. gradus expedietur, aut communi termino $A^{25} E^5 D$ æquabitur, unde manabit solutio per curvas 6^i. gradus. Sic inventio 72 mediarum solvetur per curvas 9^i. gradus, & patet ex præmissis posse assignari rationem inter gradum problematis & gradum curvarum illud solventis omni datâ ratione majorem. Quod cum viderint Cartesiani, non dubito quin necessitati & admonitionis & emendationis nostræ subscribant. Advertendum autem

immutandam ſæpe eſſe ipſam æquationis formam ut commodam per partes aliquotas diviſionem homogenea ipſa recipiant, quod ſemel monuiſſe ſufficiet. Proponatur videlicet inventio decem mediarum & ſit æquatio inter A^{11} & $B^{10} D$, ducatur quodlibet ex homogeneis in rectam datam verb. grat. Z, ut ſit æquatio inter $A^{11} Z$ & $B^{10} D Z$, ita enim ad numerum 12 pervenietur cujus ope facillima per partes aliquotas evadet reductio aut depreſſio, æquetur videlicet quodlibet ex homogeneis $A^{8} E^{4}$ illinc orietur æquatio inter $A^{3} Z$ & E^{4} quæ dat curvam 4^{i} gradus. Iſtinc verò beneficio extractionis lateris quadratoquadratici inter $A^{2} E$ & latus quadratoquadraticum homogenei dati $B^{10} D Z$, quod, ſi placet, ſit N ſolidum, quæ æquatio dat curvam 3^{i} gradus, atque ita invenientur 10. mediæ per duas curvas quarum altera eſt 4^{i}. altera vero 3^{i}. gradus. Quod per levem illam prioris æquationis immutationem facillimè ſumus executi. Nec moror infinita alia quæ Analyſtis ars ipſa abunde ſuppeditabit compendia: Hoc tantùm adjungo ea omnia quæ ſuperiùs diximus non ſolum locum habere cum poteſtas ignota nullum aliud ſub gradibus inferioribus adfectum continet homogeneum, ſed etiam ſi aliqua ex homogeneis à gradibus poteſtati proximioribus adficiantur ut ſi $A^{13} + N A^{12} + M A^{11} + R A^{10}$ æquetur $B^{10} D$, ſolutio hujus quæſtionis perinde facilis reddetur communi adſumpto æquationis homogeneo quo ſupra uſi ſumus, nempe $A^{9} E^{1} D$, ac ſi invenienda 12 mediæ inter duas datas proponerentur. Simili autem in æquationibus ab altioribus gradibus adfectis utemur artificio.

Notandum tamen in æquationibus in quibus una tantùm reperitur ignota quantitas ex una parte, exponentem poteſtatis illius puræ debere eſſe numerum primum ut ab eo gradus illius problematis deſignetur. Si enim exponens ille ſit numerus compoſitus, problema ad gradus numerorum qui eum metiuntur ſtatim devolvetur. Quærantur, exempli gratiâ, 8 mediæ continuè proportionales inter duas datas, fiet æquatio inter A^{9} & $B^{8} D$, quo caſu cum numerus 9. ſit compoſitus à numero 3. bis menſuratus, inferetur problema eſſe 3^{i}. gradus, quod quidem ita ſe habet, ſi enim inter duas datas reperiantur duæ mediæ, & rurſus inter primam & ſecundam, ſecundam & tertiam, tertiam & quartam reperiantur ſimiliter duæ mediæ, fient 8 mediæ inter duas primùm propoſitas lineas. Si quærantur 14. mediæ inter duas datas, æquatio quæ eſt inter A^{15} & $B^{14} D$ indicabit problema devolui ad illa duo problemata quorum unum eſt 3^{i} gradus, alterum 5^{i}. unde apparet exponentem puræ poteſtatis debere eſſe numerum primum ut verè gradum problematis exprimat & deſignet.

Cum autem numeros à binario quadraticè in ſe ductos & unitate auctos eſſe ſemper numeros primos apud me conſtet & jam dudum Analyſtis illius theorematis veritas fuerit ſignificata, nempe eſſe primos 3. 5. 17. 257. 65537. &c. in infinitum, nullo negotio inde derivabitur methodus cujus beneficio problema conſtruemus cujus gradus ad gradum curvarum ipſius ſolutioni inſervientium rationem habeat datâ quavis majorem. Proponatur namque inter duas datas invenire 256 medias continuè proportionales fiet æquatio inter A^{257} & B^{256} & ſinguli termini æquabuntur ſequenti $A^{240} E^{16} D$, & mox quæſtio per curvas 17^{i} gradus expedietur, ſi quærantur mediæ 65536 quæſtio per curvas 257 gradus ſolvetur, & ſic in infinitum gradus majoris numeri deprimetur ad gradum numeri proximè minoris. Inter duos autem proximos rationem in infinitum augeri quis non videt? An ergo erraſſe Carteſium ulteriùs Carteſiani diſſimulabunt, ego ſanè ἐπέχω & quid ſtatuendum hac de re ſit ſollicitus & tacitus expecto.

PORISMATUM EUCLIDÆORUM

Renovata Doctrina, & ſub formâ Iſagoges recentioribus Geometris exhibita.

ENUMERAVIT Pappus initio libri ſeptimi libros veterum Geometrarum ad τόπον ἀναλυόμενον pertinentes : qui omnes cùm temporis injuriâ perierint, exceptis unico datorum Euclidis libello & quatuor prioribus conicorum Apollonii, elaborandum Neotericis Geometris maximè fuit ut damnum operum, quæ tentavit edax abolere vetuſtas, aliquantiſper reſarcirent ; & primò quidem ſubtiliſſimus ille, nec unquam ſatis laudatus Franciſcus Vieta Apollonii περὶ ἐπαφῶν libros unico, quem Apollonium Gallum inſcripſit, libello feliciter reſtituit ; cujus exemplo ſe ad eamdem provinciam Marinus Ghetaldus, & VVillebrordus Snellius accingere non dubitarunt, nec defuit propoſito eventus, libros enim Apollonii λόγου ἀποτομῆς, χωρίου ἀποτομῆς, διωρισμένης τομῆς & νεύσεων illorum beneficio vix amplius deſideramus. Sequebantur loci plani, loci ſolidi, & loci ad ſuperficiem. At huic quoque parti non ignoti nominis Geometræ ſuccurrerunt : eorumque opera manuſcripta licèt, & adhuc inedita latere non potuerunt. Sed ſupererat tandem intentata, ac velut deſperata poriſmatum Euclidæorum doctrina. Eam quamvis opus artificioſiſſimum, ac perutile ad reſolutionem obſcuriorum problematum Pappus aſſerat, nec ſuperioris nec recentioris ævi Geometræ vel de nomine cognoverunt, aut quid eſſet ſolummodò ſunt ſuſpicati. Nobis tamen in tantis tenebris dudum cæcutientibus, & quâ ratione in hac materiâ Geometriæ opitularemur elaborantibus, tandem ſe clara videndam obtulit, & purâ per noctem in luce refulſit ; nec debuit inventi novantiqui ſpecimen poſteris invideri, poſtquam enim Suevicum ſydus omnibus diſciplinis illuxit, fruſtra ſcientiarum arcana tanquam myſteria quædam abſcondamus, nihil quippe impervium perſpicaciſſimo incomparabilis Reginæ ingenio, nec fas cenſemus occultare doctrinam quam vel unico duntaxat aut inſpirantis, aut mandantis nutu, quandocunque libuerit, detectam iri vix poſſumus dubitare. Ut autem clariùs ſe prodat totum poriſmatum negotium, celebriores quaſdam propoſitiones poriſmaticas ſelegimus eaſque Geometris & conſiderandas & examinandas confidenter exhibemus, ut mox quid ſit Poriſma & cui maximè inſerviat uſui innoteſcat.

Porisma primum.

Videatur figura porismatis 1.

Sint duæ rectæ ON, O C, quæ angulum constituant in puncto O & sint ipsæ positione datæ, dentur & puncta A & B, à punctis B & A ducantur rectæ B E, A F ipsi OC parallelæ & occurrentes rectæ N O productæ in punctis E & F, jungatur recta A E, quæ rectæ C O productæ occurrat in D, jungatur itidem recta FB, quæ eidem rectæ C O occurrat in C & ad quodvis punctum rectæ O N ut V, verbi gratiâ, inflectantur rectæ A V, B V, ita ut recta AV occurrat rectæ O C in puncto S recta autem BV eidem O C occurrat in puncto R, rectangulum sub C R in D S æquale semper erit rectangulo sub C O in O D, ideoque spatio dato.

Porisma secundum.

Videatur figura porismatis 2.

EXponatur parabole quævis N A B, cujus diametri quælibet sint B E O, sumantur in curva duo quævis puncta A & N; à quibus inflectantur ad aliud quodvis curvæ punctum, ut D, Rectæ A D N, quæ in diametris puncta E, O, G, Q signent, in eadem diametro abscindentur semper duæ rectæ, quæ eamdem servabunt rationem; erit nempe ut O B ad B E, ita, Q B ad G B, idque in infinitum.

Porisma tertium.

Videatur figura porismatis 3.

ESto circulus cujus diameter recta A D, Cui parallela utcunque ducatur N M; circulo in punctis, N & M occurrens; & sint data puncta N & M, inflectatur utcunque recta N B M, quæ secet diametrum in punctis O & V. Aio datam esse rationem rectanguli sub A O in D V, ad rectangulum sub A V in D O; ideoque si inflectatur N C M secans diametrum in punctis R S, erit semper ut rectangulum sub A N in D V ad rectangulum sub A V in D O, ita rectangulum sub A R in D S, ad rectangulum sub A S in D R, nec difficile est propositionem ad ellipses, hyperbolas & oppositas sectiones extendere.

Porisma quartum.

Videatur figura porismatis 4.

EXponatur Circulus I C H cujus diameter I D H data, centrum D, radius ad diametrum normalis C D, sumantur in diametro producta puncta B & A data, & sint rectæ A I, B H æquales, fiat ut D I ad I A, ita R L ad L I, & sit recta D R æqualis D L, dabuntur puncta R & L, jungatur recta C A cui æqualis ponatur A F ad diametrum perpendicularis, eidemque fiat B G æqualis & parallela, inflectatur quævis recta ad circulum à punctis F & G, ut F E G, quæ diametrum secet in punctis M & N, Aio summam duorum quadratorum R M, L N æquari semper eidem spatio dato; iisdem positis in secundo casu jungatur recta C L cui æqualis ponatur L P ad diametrum perpendicularis, eidemque æqualis & parallela fiat R Z, si à duobus punctis Z & P inflectatur quælibet ad circumferentiam recta ut P V Z secans diametrum in punctis K & T quadratorum A T & B K aggregatum æquabitur semper alteri spatio dato.

Porisma quintum.

Videatur figura porismatis 5.

ESto circulus R A C, cujus diameter R D C data, centrum D, radius D A ad diametrum normalis, sumantur utcunque puncta Z & B data in diametro à centro D æquidistantia, & juncta A Z fiat æqualis Z M ad diametrum perpendicularis eidemque æqualis, & parallela ducatur B O, inflectatur quævis ad circumferentiam recta M H O quæ diametrum in punctis E & N secet, erit semper ratio quadrarorum EH, H C, simul sumptorum ad triangulum E H N data, eadem nempe quæ rectæ A Z ad quartam partem rectæ Z D. Ex adductis porismatibus, quorum propositiones elegantissimas & pulcherrimas esse qnis diffitearur, haud difficulter indaganda se prodir ipsa porismatum natura.

Enunciari nempe possese, cundùm Pappum, vel ut theoremata vel ut problemata statim patet, nos sane ut theoremata enunciavimus, sed nihil vetat quominus in problemata transformentur; exempli causâ sic quintum porisma concipi potest. Dato circulo RAC cujus diameter R C, quærantur duo puncta ut M & O, à quibus si inflectatur quævis ad cirenmferentiam recta ut M H O faciat semper rationem quadratotum ab abscissis EH, H C ad triangulum E H C datam; nec latet ex supradicto theoremate constructio, si enim ponatur recta A Z esse ad quartam partem Z D in ratione datâ, omnia constabunt, eâdemque ratione in reliquis & omnibus omnino porismatibus theoremata in problemata facilè transibunt.

Quod autem innuit Pappus ex sententia Jniorum Geometrarum porisma deficere hypothesi à locali theoremate, id sanè totam porismatis natutam specifieè revelar neque alio ferè auxilio quàm eo quod hæc verba subministrarunt hujusce abdita materiæ penetravimus.

Cum locum investigamus, lineam rectam aut curvam inquitimus nobis tantisper ignotam, donec locum ipsum inveniendæ lineæ designaverimus, sed cum ex supposito loco dato & cognito alium locum venamur, novus iste locus porisma vocatur ab Euclide, qua ratione locos ipsos porismatum unam speciem & esse & vocari verissimè

Pappus subjunxit. Exemplo unico definitionem nostram astruemus in figura 5'. porismatis, datâ rectâ R C, si quæratur curva quælibet ut R A B cujus ea sit proprietas ut à quolibet ipsius puncto ut A demissa perpendicularis A D faciat quadratum A D æquale rectangulo R D C inveniemus curvam R A C esse circuli circumferentiam, sed si ex dato jam loco illo alium investigemus, problema verbi gratiâ porismatis 5'. novus iste locus & infiniti alii quos periti sagacitas Analystæ repræsentabit & ex jam cognito eliciet, porisma dicetur.

Cum autem ut jam diximus Porismata ipsa sint loci, errorem latini Pappi interpretis ex græco textu emendabimus eo loco ubi Porismatum opus perutile ait ad resolutionem obscuriorum problematum ac eorum generum quæ haud comprehendunt eam quæ multitudinem præbet naturam; quæ ultima verba cum nullum ferè sensum admittant ad ipsum authorem recurrendum cujus verba in manuscriptis Codicibus ita se habent, Πορίσματα ἐστὶ πολλοῖς ἄθροισμα φιλοτεχνότατον εἰς τὴν ἀνάλυσιν τῶν ἐμβριθεστέρων προβλημάτων καὶ τῶν γενῶν ἀπερίληπτον τῆς φύσεως παρεχομένης πλῆθος.

Ait igitur porismata conferre ad Analysin obscuriorum problematum & generum hoc est problematum generalium, ex dictis enim apparet porismatum propositiones esse generalissimas, deinde subjungit, cum natura multitudinem quæ vix potest animo comprehendi subministret, quibus verbis infinitas illas & miraculo proximas ejusdem problematis indicat solutiones. Huic autem vel theorematum vel problematum inventioni non deest peculiaris à puriore Analysi derivanda methodus, cujus ope non solùm quinque præcedentia Porismata sed pleraque alia & invenimus & construximus & demonstravimus, & si hæc paucula, quæ isagogica tantùm & accuratioris operis prodroma emitti mus, doctis arrideant, tres totos porismatum libros aliquandò restituemus, imò & Euclidem ipsum promovebimus & Porismata in coni sectionibus & aliis quibuscumque curvis mirabilia sanè, & hactenus ignota detegemus.

LETTRES DE MONSIEUR DE FERMAT,

Avec quelques-unes de celles qui luy ont esté écrites par plusieurs personnes de grand sçavoir sur divers sujets de Mathematiques ou de Physique.

LETTRE DE M. DE FERMAT AU R. Pere Mersenne Minime.

Du 3. Iuin 1636.

MON R. PERE,

J'ay receu vôtre lettre avec satisfaction, puis qu'elle contient des remarques & des experiences tres singulieres. J'en fairay l'estime que je dois, & de tout ce qui me viendra de vôtre part. Je n'ay point veu de livre de Musique plus nouveau de vous que celuy que vous appellez questions harmoniques, que j'ay relié avec un autre recueil de questions, & les mechaniques de Galilæi, si la demonstration de la proposition de l'helice n'estoit pas de grand discours & de grande recherche, je vous l'envoyerois presentement; mais elle contiendra autant que deux des plus grands traitez d'Archimede, de sorte que je vous demande un peu de loisir pour cela, & cependant vous la pouvez tenir pour tres-veritable. J'en dresseray un traité exprez, ou je vous fairay voir de nouvelles helices aussi admirables qu'on en puisse imaginer. Pour vous en donner l'avant-goût, en voicy une, qui est peut-estre cette ligne que Menelaüs appelle admirable dans le Pappus.

Esto helix A M B in circulo C N B, cujus ea sit proprietas, ut ductâ qualibet rectâ, verbi gratiâ, A M N, tota circuli circumferentia sit ad ejusdem circumferentiæ portionem N C B ut A B quad. ad quad. A M (in hoc autem hæc helix differt ab helice Archimedis quod in helice Archim. sit ut circumferentia ad portionem N C B, ita

Q

A B ad A M) pronunciamus primò ſpatium ſub helice & rectâ A B comprehenſum eſſe dimidium totius circuli.

Deinde (quæ eſt proprietas mirabilis) ſpatium ex prima revolutione ortum (quod hîc ſit N) eſſe dimidium ſpatii M , ex ſecunda revolutione orti, ſpatium verò C ex 3. revolutione ortum eſſe æquale ſpatio M , & omnia omnino deinceps ſpatia ex qualibet revolutione orta dicto ſpatio M ſimiliter eſſe æqualia, ideoque & inter ſe.

Je croy que vous m'avoüerez que ces recherches ſont belles , mais j'ay ſi peu de commodité d'en écrire les demonſtrations qui ſont des plus mal-ayſées , & des plus embarraſſées de la Geometrie , que je me contente d'avoir découvert la verité , & de ſçavoir le moyen de la prouver lorſque j'auray le loiſir de le faire . Si je puis trouver quelque occaſion d'aller paſſer trois ou quatre mois à Paris , je les employeray à mettre par écrit toutes mes nouvelles penſées en ces Arts , à quoy je pourray ſans doûte eſtre beaucoup aydé de vos ſoins. J'ay veu la Geoſtatique de Mr. de Beaugrand , & me ſuis étonné dabord d'avoir trouvé ma penſée differente de la ſienne , j'eſtime que vous l'aurez déja remarqué. Je luy envoye franchement mon avis ſur ſon livre , vous aſſûrant que j'eſtime ſi fort ſon eſprit , & qu'il m'en a donné de ſi grandes preuves , que j'ay peine à me perſuader , qu'ayant entrepris une opinion contraire à la ſienne , je ne me ſois éloigné de la verité. Je conſens pourtant qu'il ſoit mon juge , & ne vous recuſe pas non plus. Et parceque j'ay écrit à la hâte la demonſtration que je vous envoya , & l'écrit que je luy envoye , je mettray tout au net à loiſir , & tacheray méme de trouver de nouvelles raiſons pour ſoutenir mon opinion, à laquelle pourtant , je ne m'attacheray jamais par opiniâtreté dés qu'il me ſaira connoître le contraire. Je ſuis , &c.

Au R. P. Merſenne Minime.

Du 24. Iuin 1636.

MON R. PERE,

Je ſuis marry de n'avoir peu vous faire preciſement comprendre mes ſentimens touchant ma propoſition Geoſtatique, Il eſt pourtant vray que je n'avois garde de la prendre au ſens que vous avez crû , car la ſeule raiſon que j'ay employée contre l'opinion de M. de Beaugrand , ça eſté celle-la méme que j'ay trouvée dans vôtre lettre , de ſorte que je n'avois garde de tomber dans un inconvenient que j'avois preveu & condamné. J'eſtime donc que tout grave , en quel lieu du monde qu'il ſoit , horſmis dans le centre , pris en ſoy & abſolument , peſe toûjours également ; & c'eſt une propoſition que j'aurois aiſement priſe pour principe ſi je ne la voyois conteſtée ; je tâcheray donc à la preuver. Mais qu'elle ſoit vraye ou non , cela n'empéche pas la verité de ma propoſition qui ne conſidere jamais le grave en ſoy , mais toûjours par relation au levier , & ainſi je ne mets rien dans la concluſion qui ne ſe trouve dans les premiſſes. Or l'equivoque , ſans doûte , eſt venüe de ce que je ne vous ay pas aſſez expliqué les nouvelles penſées que j'ay ſur le ſujet des Mechaniques , & leſquelles vous verrez groſſierement crayonnées ſur le papier que je vous envoye. C'eſt pourtant à la charge que vous m'obligerez de ne les communiquer à perſonne , & que vous me donnerez le loiſir pour en faire les demonſtrations exactes , ou plûtot pour les mettre au net , car elles ſont deja faites. L'erreur d Archimede , ſi pourtant nous le pouvons nommer ainſi, provient de ce qu'il a pris pour fondement que les bras de la balance arréteroint , quoy qu'ils ne feuſſent pas paralleles à l'horizon , dequoy j'ay demontré le contraire. Si vous examinez de nouveau la 6. & la 7. des equiponderans , vous trouverez que je ne me trompe pas , & que ſa demonſtration eſt toute fondée ſur cette ſuppoſition.

Car soit le levier E D B duquel le centre A, celuy de la terre C. Archimede pour demontrer la proposition reciproque des poids, les divise en parties égales comme E, & les attache en distances égales le long du levier. Or il suppose que le centre de gravité de deux poids est au point qui divise leur intervalle également, & cela est bien vray aux deux poids qui sont autour du point A, parceque la ligne A C, estant perpendiculaire au levier, les poids E autour du point A, se trouvent également éloignez, & du centre du levier & de celuy de la terre, & par consequent ils se trouvent d'égale inclination, mais si dans le méme levier vous prenez le point D qui divise l'intervalle des deux graves E également, en ce cas le point plus éloigné du centre du levier est aussi le plus éloigné du centre de la terre, & ainsi le point D avec les deux poids E represente une balance, de laquelle les bras ne sont pas paralleles à l'horison; mais si la descente des graves se faisoit par lignes paralleles comme en cette figure par les lignes A C, & D N, en ce cas la proposition d'Archimede seroit vraye. Ce n'est pas que dans l'usage elle manque sensiblement; mais il y a plaisir de chercher les veritez les plus menuës & les plus subtiles, & d'ôter toutes les ambiguitez qui pourroint survenir. C'est ce que j'ay fait tres exactement, & je vous puis assurer que quoy que la recherche en soit bien malaisée, j'en possede toutes les demonstrations parfaitement.

Soit le centre de la terre A, le grave E au point E, & le point N dans la superficie ou ailleurs plus éloigné du centre que le point E. Je ne dis pas, que le poids E pese moins estant en E, que s'il estoit en N, mais je dis que si le poids E est suspendu du point N par le filet N E, que la force étant au point N le retiendra plus aisément que s'il estoit plus proche de ladite force, & ce en la proportion que je vous ay assignée.

Je croy vous avoir suffisamment expliqué ma pensée sur ce sujet. Pour la question des nombres dont vous me parlez, si vous m'en faites part, je tâcheray de la resoudre: j'envoya il y a déja long-temps la proposition des parties aliquotes à M. de Beaugrand avec la construction pour trouver infinis nombres de méme nature. S'il ne l'a pas perduë, il vous en faira part. Je vous prie de relire ma proposition des graves, & de m'en dire vôtre avis. Je suis, &c.

Au R. P. Mersenne Minime.

Du 2. Septembre 1636.

MON R. PERE,

La lettre dont vous me parlez dans vôtre derniere s'est sans doûte égarée, car celle que je viens de recevoir est la seule qui m'est venuë depuis cinq ou six semaines de vôtre part; sur le sujet de laquelle je vous diray, que quand nous parlons d'un nombre composé de trois quarrez seulement, nous entendons un nombre, qui n'est ny quarré ny composé de deux quarrez: & c'est ainsi que Diophante & tous ses interpretes l'entendent, lors qu'ils disent qu'un nombre composé de trois quarrés seulement en nombres entiers, ne peut jamais estre divisé en deux quarrés, non pas méme en fractions. Autrement, & au sens que vous semblez donner à vôtre proposition, il n'y auroit que le seul nombre de trois qui fut composé de trois quarrez seulement en nombres entiers; car premierement tout nombre est composé d'autant de quarrés entiers, qu'il a d'unités. Secondement vos nombres de 11. & 14. se trouvent composez chacun de 5. quarrez. Le premier de 4. 4. 1. 1. 1. Le second de 4. 4. 4. 1. 1. que si vous entendez que le nombre que vous demandez soit composé de 3. quarrez seulement, & non pas de quatre.

en ce cas la question tient plus du hazard, que d'une conduite assurée, & si vous m'en envoyez la construction, peut-estre vous le fairay-je avouër. De sorte que j'avois satisfait à vôtre proposition, au sens de Diophante, qui semble estre le seul admissible en cette sorte de questions. Or qu'un nombre composé de 3. quarrez seulement en nombres entiers, ne puisse jamais estre divisé en 2. quarrez, non pas méme en fractions, personne ne l'a jamais encore demontré, & c'est a quoy je travaille, & crois que j'en viendray à bout, cette connoissance est de grandissime usage, & il semble que nous n'avons pas assez de principes pour en venir à bout, M. de Beaugrand est en cela de mon avis. Si je puis étendre en ce point les bornes de l'Arithmetique, vous ne sçauriez croire les propositions merveilleuses que nous en tirerons. Pour la proposition Geostatique, elle est toute fondée sur ce principe seul, que deux graves égaux joints par une ligne ferme & laissez en liberté se joindront au centre de la terre par le point qui divise également la ligne qui les unit, c'est à dire que ce point de division s'unira au centre de la terre. Messieurs de Pascal & de Roberval, aprés avoit reconnu que tout mon raisonnement est fondé là dessus, & qu'accordant ce principe, ma proposition est sans difficulté, m'ont nié ce principe, que je prenois pour un axiome le plus clair & le plus évident qu'on peut demander, obligez-moy de me dire si vous estes de leur sentiment. Je l'ay pourtant démontré depuis peu par de nouveaux principes tirez des experiences qu'on ne me sçauroit contester, & je le leur envoyeray au plûtot. Je suis, &c.

Lettre de Messieurs de Pascal & de Roberval à M. de Fermat.

A Paris le 16. Aoust 1636.

MONSIEUR,

Le principe que vous demandés pour la Geostatique est, que si deux poids égaux sont joints par une ligne droite ferme & de soy sans poids, & qu'étans ainsi disposez ils puissent descendre librement, ils ne reposeront jamais jusqu'a ce que le milieu de la ligne (qui est le centre de pesanteur des anciens) s'unisse au centre commun des choses pesantes. Ce principe, lequel nous avons consideré il y a long-temps, ainsi qu'il vous a esté mandé, paroit d'abord fort plausible: mais quand il est question de principe, vous sçavez quelles conditions luy sont requises pour estre receu: desquelles conditions, au principe dont il s'agit, la principale manque; sçavoir, que nous ignorons quelle est la cause radicale qui fait que les corps pesants descendent, & quelle est l'origine de leur pesanteur. Ce qui n'étant point en nôtre connoissance (comme il faut librement avoüer, & en cecy, & quasi en toutes les autres choses physiques) il est évident qu'il nous est impossible de determiner, ce qui arriveroit au centre ou les choses pesantes aspirent, ny aux autres lieux hors la surface de la terre, sur laquelle, parceque nous y habitons, nous avons quelques experiences assez constantes, desquelles nous tirons ces principes en vertu desquels nous raisonnons en la Mechanique.

La diversité des opinions touchant l'origine de la pesanteur des corps, aucune desquelles n'a esté jusques icy ny demontrée ny convaincue de fausseté par demonstration, est un ample témoignage de l'ignorance humaine en ce point.

La commune opinion eſt, que la peſanteur eſt une qualité qui reſide dans le corps méme qui tombe.

D'autres ſont d'avis que la deſcente des corps procede de l'attraction d'un autre corps qui attire celuy qui deſcend, comme de la terre. Il y a une troiſiéme opinion qui n'eſt pas hors de vray-ſemblance ; que c'eſt une attraction mutuelle entre les corps, cauſée par un deſir naturel que ces corps ont de s'unir enſemble ; comme il eſt évident au fer & à l'aimant, leſquels ſont tels, que ſi l'aimant eſt arreſté, le fer ne l'étant pas, l'ira trouver ; & ſi le fer eſt arreſté, l'aimant ira vers luy ; & ſi tous deux ſont libres, ils s'approcheront reciproquement l'un de l'autre ; en ſorte toutefois, que le plus fort des deux faira le moins de chemin.

Or de ces trois cauſes poſſibles de la peſanteur ou des centres des corps, les conſequences ſont fort differentes, particulierement de la premiere & des deux autres, comme nous fairons voir en les examinant.

Car ſi la premiere eſt vraye, le ſens commun nous dicte, qu'en quelque lieu que ſoit un corps peſant, prés ou loin du centre de la terre, il peſera toûjours également, ayant toûjours en ſoy la méme qualité qui le fait peſer, & en méme degré. Le ſens commun nous dicte auſſi (poſée cette méme opinion premiere) qu'alors un corps repoſera au centre commun des choſes peſantes, quand les parties du corps qui ſeront de part & d'autre du méme centre, ſeront d'égale peſanteur, pour contrepeſer l'une à l'autre, ſans conſiderer ſi elles ſont peu ou beaucoup, également ou inégalement éloignées du centre commun.

Si cette premiere opinion eſt veritable, nous ne voyons point que le principe que vous demandez pour la Geoſtatique puiſſe ſubſiſter.

Car ſoint deux poids égaux A B joints enſemble par la ligne droite ferme & de ſoy ſans poids A B & ſoit C le point du milieu de la méme ligne A B, & ſoint D, E, deux autres points tels quels dans ladite ligne entre les poids A & B. Vous demandez qu'on vous accorde que les poids A, B tombans librement avec leur ligne ne repoſeront point juſqu'à ce que le point du milieu C s'uniſſe au centre commun des choſes peſantes. Suivant cette premiere opinion nous accordons, que ſi le point C eſt uny au centre des choſes peſantes, le composé des poids A B demeurera immobile veritablement. Mais il nous ſemble auſſi que ſi le point D ou E convient avec le méme centre commun des choſes peſantes, combien que l'un des poids en ſoit plus proche que l'autre, ils contrepeſeront encore & demeureront en equilibre : puiſque (pour nous ſervir de vos propres termes) ces deux poids ſont égaux, & ont tous deux méme inclination de s'unir au méme centre commun des choſes peſantes, & l'un n'a aucun avantage ſur l'autre pour le déplacer de ſon lieu. Et ne ſert de rien d'alleguer le centre de peſanteur du corps A B, lequel centre ſelon les anciens eſt au milieu C ; car il n'a pas eſté demontré que le point C ſoit le centre de peſanteur du composé A B ſinon lors que la deſcente des corps ſe fait naturellement par des lignes paralleles, ce qui eſt contre vos ſuppoſitions & les nôtres & contre la verité, & méme nous ne voyons pas qu'aucun corps, horſmis la Sphere, ait un centre de peſanteur, poſée la definition de ce centre ſelon Pappus & les autres Autheurs : & quand il y en auroit un en chaque corps, il ne paroit pas (& n'a jamais eſté demontré) que ce ſeroit ce point la par lequel le corps s'uniroit au centre des choſes peſantes : méme cela, pour les raiſons precedentes repugne à nôtre commune connoiſſance en pluſieurs figures, comme en la ſeconde des deux figures ſuivantes. En tout cas nous ne voyons point que ce centre de peſanteur des anciens doive eſtre conſideré autre part qu'aux poids qui ſont pendus ou ſoutenus hors du lieu auquel ils aſpirent.

Quand à la comparaiſon qui vous a eſté faite d'un levier horizontal, lequel eſtant preſſé horizontalement aux deux bouts par deux forces ou puiſſances égales, demeure en l'eſtat qu'il eſt : elle vous ſemble entierement pareille au levier precedent A B

(puis que vous le voulez appeller ainsi,) d'autant que ces poids ne pressent le levier que par la force ou puissance qu'ils ont de se porter vers leur centre commun. Comme si le levier horizontal est A B, & les forces ou puissances égales A & B pressans horizontalement le levier pour se porter à un certain point commun C, auquel elles aspirent, & lequel est posé également ou inégalement entre les mémes puissances dans la ligne A B. Ces forces pressans également le levier, se resisteront l'une à l'autre selon nôtre sens; encore meme que l'une comme A, fut plus proche que l'autre du point commun auquel toutes deux aspirent. Et quand le levier ne seroit pas horisontal, mais en telle autre position que l'on voudra, estant consideré de soy sans poids, & toutes les autres choses comme auparavant, le méme effet s'ensuivra selon nôtre jugement.

Nous adjouterons icy ce que nous pensons suivant cette premiere opinion, de deux poids qui seroint inégaux joints comme dessus à une ligne droite ferme & de soy sans poids.

Soint donc deux poids inégaux A & B, desquels A soit le moindre, & soit A B la ligne ferme qui les joint, dans laquelle le point C soit le centre de pesanteur du composé des corps A B, selon les anciens; ce point C ne sera pas au milieu de la ligne A B. Si donc on met le composé des poids A B, de sorte que le point C convienne au centre commun des choses pesantes, nous ne pouvons croire que ce composé demeurera en cét estat, le poids A estant entierement d'une part du centre des choses pesantes, & le poids B entierement de l'autre part. Mais il nous semble que le plus grand poids B doit s'approcher du méme centre des choses pesantes jusqu'à ce qu'une partie dudit poids B soit au delà dudit centre vers A comme la partie D, en sorte que cette partie D avec tout le poids A estant d'une méme part, soit de méme pesanteur que la partie E restante de l'autre part.

Si la seconde opinion touchant la cause de la descente des poids est veritable, voicy les consequences qu'on en peut tirer selon nôtre jugement.

Soit le corps attirant A B C D spherique duquel le centre soit H; & que la vertu d'attraction soit également épanduë par toutes les parties du méme corps, en sorte que chacune selon sa puissance, tire à soy le corps attiré, ainsi que supposent les Auteurs de cette opinion.

Sur cette position, le sens commun nous dicte que les distances & autres conditions estant pareilles, les parties égales du corps attirant, attireront également, & les inégales, inégalement.

Soit donc le corps attiré L, consideré premierement hors le corps attirant en A. soit méme la ligne droite A H, à laquelle soit un plan perpendiculaire E H D, coupant le corps A B C D en deux parties égales, & partant d'égale vertu. Soint aussi dans la ligne A H, pris tant de points que l'on voudra, comme K I, par lesquels sont menez des plans F I C, G K B paralleles au plan E H D coupans le corps attirant A B C D en parties inégales, & partant d'inégale vertu. Alors le corps L, estant en A, sera attiré vers H par la vertu entiere de tout le corps A B C D; & le chemin estant libre, il viendra en K ou étant il sera attiré vers H par la plus grande & forte partie B D E G, & contretiré vers A par la plus petite & plus foible partie B A G. Il en sera de méme quand il sera parvenu en I, ou il sera moins attiré que quand il estoit en K ou en A, toutefois il sera toûjours contraint de s'approcher du centre H, tant qu'il y soit venu : mais la partie qui attire diminuant toujours, & celle qui contretire s'augmentant toûjours il sera continuellement attiré avec moins de vertu, jusqu'a ce qu'estant arrivé en H, il sera également attiré de toutes parts, & demeurera en cet estat.

Si cette position est vraye, il est facile de voir que le corps L pesera d'autant moins qu il sera plus proche du centre H; mais cette diminution ne sera pas en la raison des lignes H A, H K, H I, ce que vous connoitrez en le considerant sans autre explication.

Si la troisiéme opinion de la descente des corps est veritable les conclusions que l'on

en peut tirer font les mémes, ou fort approchantes de celles que nous avons tirées de la feconde opinion.

Puis donc que de ces trois caufes poffibles de la pefanteur, nous ne fçavons quelle eft la vraye, & que méme nous ne fommes pas affurez que ce foit l'une d'elles, fe pouvant faire que la vraye caufe foit composée des deux autres, ou que c'en foit une toute autre, de laquelle on tireroit des confequences toutes differentes, il nous femble que nous ne pouvons pofer d'autres principes pour raifonner en cette matiere, que ceux defquels l'experience affiftée d'un bon jugement nous a rendus certains.

Pour ces confiderations dans nos conferences de Mechanique nous appellons des poids égaux ou inégaux, ceux qui ont égale ou inégale puiffance de fe porter vers le centre commun des chofes pefantes, & nous entendons un méme corps avoir un méme poids quand il a toûjours cette méme puiffance : que fi cette puiffance augmente ou diminüe, alors, quoy que ce foit le méme corps, nous ne le confiderons plus comme le méme poids. Or que cela arrive ou non aux corps qui s'éloignent ou s'approchent du centre commun des chofes pefantes, c'eft chofe que nous defirerions bien de fcavoir : mais ne trouvans rien qui nous fatisfaffe fur ce fujet, nous laiffons cette queftion indecife, raifonnans feulement fur ce que les anciens & nous avons peu découvrir de vray jufqu'à maintenant.

Voyla ce que nous avons à vous dire pour le prefent touchant vôtre principe de la Geoftatique, laiffans à part beaucoup d'autres doutes pour éviter prolixité de difcours.

Quant à la nouvelle proportion des Angles que vous mettez en avant ; afin de la demontrer, vous fuppofez deux principes, defquels le premier eft vray : mais le fecond eft fi éloigné d'eftre vray, qu'il y a des cas où il arrive tout le contraire de ce que vous demandez qu'on vous accorde pour vray.

Le premier eft tel. Soit A le centre commun des chofes pefantes, l'appuy du levier N ; & du centre A intervalle A N, foit décrite une portion de circonference telle quelle C N B, pourveu que l'arc C N foit égal à l'arc N B ; & foit confiderée la circonference C N B, comme une balance ou un levier de foy fans poids, qui fe remue librement à l'entour de l'appuy N, foint auffi des poids égaux pofez en C & B. Vous fuppofez que ces poids fairont equilibre eftans balancez fur le point N. Et il femble que tacitement vous fuppofez encore l'équilibre quand les bras du levier N C & N B feroint des lignes droites pourveu que les extremitez C & B foint également éloignées du centre A, & les lignes N C & N B, foûtendantes ou cordes en effet ou en puiffance d'arcs égaux N C, N B.

Toutes ces chofes font vrayes en general; mais nous ne les croyons telles que pour les avoir démontrées par des principes qui nous font plus clairs & plus connus.

Toutefois en particulier il y a une diftinction à faire, laquelle eft de grande confideration. Sçavoir que quand les arcs N C & N B font chacun moindre qu'un quart de circonference, le levier C N B, chargé des poids C & B pefe fur l'appuy N, pouffant vers le centre A pour s'en approcher. Mais quand les arcs C N, N B font chacun un quart de circonference, le levier C N B chargé des poids C, B ne pefe nullement fur l'appuy N, d'autant que les poids font diametralement oppofez ; & partant le levier demeurera de méme fans appuy qu'avec un appuy. Finalement quand les arcs égaux N C, N B font chacun plus grand qu'un quart de circonference, le levier C N B chargé des poids égaux C, B pefe fur l'appuy N pouffant vers P, pour s'éloigner du centre A.

Cette diftinction eftant vraye comme elle eft, voftre fecond principe ne peut fubfifter, ce qui paroîtra affez par l'examen d'iceluy.

Voftre fecond principe eft tel. Soit A le centre commun des chofes pefantes, la balance ou le levier E F B CD, dont l'appuy eft D. Soit posé un poids comme B, tout entier au point B pefant de toute fa puiffance fur l'appuy B. Ou bien foit divisé le poids B en parties égales E F B C D, lefquelles foint posées fur le levier aux points E, F, B, C, D,

étans les arcs E F, F B, B C, C D égaux, & tout l'arc E F B C D décrit alentour du centre A; vous supposez que le poids B mis tout entier au point B pesera de méme sur l'appuy B, qu'estant posé pat parties égales aux points E F B C D. Cela est tellement éloigné du vray, que quelquefois le poids B, ainsi posé par parties sur le levier ne pesera plus du tout sur l'appuy B; quelquefois au lieu de peser sur l'appuy B pour tirer le levier vers A, il pesera tout au contraire sur le méme appuy B pour éloigner le levier de A. Et toutefois estant ramassé tout entier au point B, il pesera toûjours de toute sa force sur l'appuy B, pour emporter le levier vers A. Et generalement estant divisé & étendu il pesera toûjours moins sur l'appuy, qu'estant ramassé au point B, & vous supposez qu'entier & divisé il pese toûjours de méme.

Toutes ces choses sont demontrées en suite de nos principes & nous vous en expliquerons les principaux cas que vous connoistrez veritables sans aucune demonstration.

Soit derechef A le centre commun des choses pesantes, alentour duquel soit décrit le levier C B D qui soit de soy sans poids, prolongé tant que de besoin: & soit B le point de l'appuy, auquel si un poids est posé, nous demeurons d'accord avec vous qu'il pesera de toute sa puissance sur l'appuy B, lequel appuy s'il n'est assez fort rompra, & le poids s'en ira avec son levier jusques au centre A. Maintenant soit divisé le poids premierement en deux parties égales: & ayant pris les arcs B C & C D chacun d'un quart de circonference, afin que tout l'arc C B D soit une demie circonference soit posée une moitié du poids en D, l'autre en C; lors ces deux poids C & D pesans vers A ne feront point d'autre effet sur le levier C B D, sinon qu'ils le presseront également par les deux extremitez C & D pour le courber. Supposant donc qu'il est assez roide pour ne pas plier; ils demeureront sur le levier de méme que s'ils étoient attachez aux bouts du diamettre D A C sans qu'il soit besoin de l'appuy B sur lequel le levier chargé de ses deux poids ne fait aucun effort: & quand cét appuy sera osté, le tout demeurera de méme qu'avec l'appuy, ce qui est assez clair.

Que si le poids est divisé en plus de deux parties égales, & qu'estant estendu sur des portions égales du levier, deux d'icelles parties se rencontrent aux points C, D, & les autres dans l'espace C B D; alors celles qui seront en C & D ne chargeront point l'appuy B: quant aux autres, elles le chargeront, mais d'autant moins que plus elles approcheront des points C D, ausquels finit la charge: ainsi il s'en faudra beaucoup que toutes ensemble étenduës chargent autant l'appuy que lors qu'elles sont ramassées en B: elles ne pesent donc pas de méme.

Davantage soient pris les arcs égaux B C & B D chacun plus grand qu'un quart de circonference, & soit imaginée la ligne droite C D; puis estant divisé le poids en deux parties égales seulement, soient attachées l'une en C, & l'autre en D: alors il est clair que le levier chargé des poids C, D, pesera sur l'appuy B; mais ce sera tout au contraire, que si les deux poids estoint ramassez en B: car si l'appuy n'est pas assez fort il rompra, & les poids emportans le levier, que nous supposons estre de soy sans poids, ne cesseront de mouvoir tant que la ligne droite C D soit venuë au point A, le levier estant monté en partie au dessus de B vers P, au lieu de s'abaisser vers A comme il arriveroit si les poids estans ramassez en B, avoint rompu l'appuy. Voyez quelle difference.

Enfin soit le levier comme auparavant, auquel soient des quarts de circonference B C, B D, & de part & d'autre du point C soient pris des arcs égaux C G, C E chacun moindre qu'un quart. De méme de part & d'autre du point D soint pris les arcs égaux entre eux & aux precedents D H, D F, tous commensurables au quart. Soit aussi divisé tout l'arc E B F en tant de parties égales que l'on voudra, en sorte que les points E, C, G, B, H, D, F, soint du nombre de ceux qui font la division, & soit divisé le poids en autant de parties égales que l'arc E B F, lesquelles parties de poids soient posées sur les parties de la division du levier: alors les poids qui se trouveront posez sur les arcs E C & F D déchargeront autant l'appuy B qu'il estoit chargé par ceux des arcs C G, D H:

DH : partant tous ceux qui feront sur les arcs E G & F H ne chargeront point l'appuy B, lequel, par ce moyen ne sera chargé que par ceux qui seront sur l'arc G B H, & si entre B G & B H il n'y a aucun poids (ce qui arrivera quand ces arcs B G & B H ne feront chacun qu'une partie de la susdite division du levier) alors l'appuy B sera entierement déchargé. Voyés donc combien il y a de difference entre les poids ramassez en B, & étendus par parties sur le levier E B F, voyez aussi qu'un méme poids divisé par parties, & étendu sur le levier, pese d'autant moins sur l'appuy B que plus grande est la portion qu'il occupe de la circonference décrite alentour du point A centre commun des choses pesantes.

Cette derniere consideration pourroit bien estre cause qu'un méme corps peseroit moins, plus proche que plus éloigné du centre commun des choses pesantes : mais la proportion de ces pesanteurs ne seroit nullement pareille à celle des distances ; & seroit peut-estre tres difficile à examiner.

Maintenant pour venir à vôtre demonstration. Soit le levier G I R, duquel l'appuy soit I, & que les extremitez G, R & l'appuy I soient également éloignez de A centre commun des choses pesantes, alentour duquel soit imaginée la portion de circonferen ce G I R, & soit fait que comme l'arc G I est à l'arc I R, ainsi le poids R soit au poids G: Vous dites que le levier chargé des poids G R demeurera en equilibre sur son appuy I. Quant à la demonstration, vous supposez qu'elle est facile en consequence de vos deux principes precedens. Et de fait si ces principes estoint vrais, il ne resteroit aucune difficulté, & la chose se pourroit conclurre ainsi. Soit faite la preparation suivant la methode d Archimede, en sorte que les arcs R Q, R M soient égaux, tant entre-eux qu'a l'arc I G ; & les arcs G B, G M égaux, tant entre-eux qu'a l'arc I R. Et soit estendu le poids R également depuis Q jusques en M, & le poids G aussi également depuis M jusques en B ; ainsi les deux poids G R seront également étendus, sur tout l'arc B G I M R Q, lequel arc sera quelquefois moindre que la circonference entiere, quelquefois égal à icelle, & quelquefois plus grand. Et d'autant que les portions I B, I Q sont égales, le levier B G I R Q demeurera en equilibre, par le premier principe sur l'appuy I. Mais le poids G étendu depuis B iusques en M pese de méme qu'estant ramassé au point G, par le second principe : & par le méme principe, le poids R posé de méme estant étendu depuis M jusques en Q, qu'estant ramassé au point R. Partant puis que ces deux poids estans ramassez en G & en R pesent de méme sur le levier, qu'estans étendus, & qu'estans étendus ils font equilibre sur le levier ; ils feront encore equilibre estans ramassez en G & en R.

En cette demonstration tout ce qui est fondé sur le second principe, reçoit les mémes difficultez que le principe méme : & partant la conclusion ne s'ensuit point que les poids G R, fassent equilibre sur le levier G I R.

Nous pouvons nous contenter de ce que dessus, croyans que vous serez satisfait ; mais nous vous prions de considerer encore deux instances dont la premiere est telle.

Au levier G I R soit l'angle G I R droit, & partant l'arc G I R, une demie circonference décrite autour de A centre commun des choses pesantes. Si l'on pose l'arc G I, moindre que l'arc I R, par exemple que G I soit le tiers de I R & le poids R de 20. livres ; il faudroit donc en G 60. liures selon vous, pour faire equilibre sur le levier G I R appuyé au point I, & toutefois si vous mettez des poids égaux en G & en R, ils seront diametralement opposez, & partant par le principe de la Geostatique au cas dudit principe, accordé par vous & par nous, lesdits poids égaux feront encore equilibre comme s'ils pesoint sur les extremitez du diametre G R vers le centre A : & quand il y a une fois equilibre, pour peu que l'on augmente ou diminuë l'un des poids l'equilibre se perd. Voyez comme cela se peut accorder avec vôtre position.

La seconde instance est telle. Soit A le centre commun des choses pesantes à l'entour duquel soit la circonference G I R, l'appuy du levier I, & les bras I G, I R desquels G I.

R

soit le moindre, & soit prolongée la ligne droite I A tant qu'elle rencontre la circonference en B. Partant selon vous, il faudra en G un plus grand poids qu'en R. Et si on prend l'arc I C plus grand que I R, mettant en C le méme poids qui estoit en R, il faudra en G un plus grand poids qu'auparavant pour faire l'equilibre. De méme prenant l'arc I D. encore plus grand que I C, & faisant I D estre le bras du levier, & mettant en D le méme poids qui estoit en C, il faudra encore augmenter le poids G. Ainsi plus le bras du levier qui est en la circonference I R B, aboutira prés du point B, estant chargé du méme poids, plus il faudra en G un grand poids pour contrepeser. Et selon le sens commun par le raisonnement ordinaire, le bras du levier estant la ligne droite I B chargé comme dessus, il faudroit en G le plus grand poids. Et toutefois alors le poids qui sert en B, pesant vers A fairoit tout son effort sur la roideur du bras B I, & le moindre poids qui seroit en G fairoit balancer le bras I B vers D: & pour peu que le poids qui sera en G fasse balancer le bras I B avec son poids, vers D (ce qui est facile à démontrer) alors encore que tant G que B sortent hors la circonference, on conclurra quelque chose de choquant de vôtre position.

Enfin, Monsieur, parceque l'experience de ce que dessus, ne se peut faire par les hommes, des poids à l'égard de leur centre naturel; si vous vouiez prendre la peine de la faire alentour d'un centre artificiel, supposant pour levier un petit cercle artificiel, au lieu du grand cercle naturel, & des puissances qui agissent ou aspirent vers le centre du petit cercle au lieu des poids qui tendent vers le centre du grand, vous trouverez que l'experience est du tout conforme à ce raisonnement.

Si vous avez agreable de continuer nos communications sur ce sujet ou sur celuy de la Geometrie en laquelle nous sçavons que vous excellez entre tous ceux de ce temps, nous tâcherons à vous donner contentement: & ce que nous vous proposerons ne sera point par forme de questions, car nous en envoyerons les demonstrations en méme temps pour en avoir vostre jugement. Vous nous obligerez aussi de nous faire part de vos pensées. Nous sommes, &c.

Lettre de M. de Fermat à Messieurs de Pascal & de Roberval.

Du 23. Aoust 1636.

MESSIEURS.

J'ay leu avec grand soin le jugement qu'il vous a plû me donner des propositions que j'avois envoyées à M. de Carcavi, & comme j'ay reconnu la fermeté de vôtre raisonnement jointe avec une grande & profonde connoissance de cette matiere, j'ay aussi cru que vous ne trouveriez pas mauvaise ma replique que je fairay en peu de mots, & que peut-estre je tireray à ce coup de vous le consentement que vous n'avez pas voulu m'accorder d'abord, & je ne pense pas avoir besoin de m'excuser des erreurs qu'il vous a semblé que j'avois commises, à quoy quand je ne répondrois que par la hâte que j'eus décrire à M. de Roberval, lequel j'avois prié de suppleér ce qui ne seroit pas expliqué assez au long, j'aurois peut-estre suffisamment satisfait; mais pourtant je vous declare que je n'ay jamais crû parler que du levier moindre que le demi-cercle, & si j'ay obmis de l'écrire, ma figure qui n'en represéntoit que celuy-là reparoit assez ce manquement, puisque je n'avois pas seulement eu le temps d'écrire la demonstration de ma proposition sur madite figure, que si le levier est plus grand que le demy cercle j'ajoûteray à la fin de ce discours la proportion qu'il doit garder. Il me semble que j'en ay assez dit pour répondre à la plus forte des objections que vous avez faites contre mon second levier.

l'autre qui combat mon ſecond principe a eſté preveüe par moy, & je vous avoüeray que quoy que ce ſecond principe ſoit manifeſtement faux, & qu'il choque mon ſentiment ſur le ſait du premier levier, je l'avois pourtant induſtrieuſement, & à deſſein mis dans ma lettre, afin de vous faire accorder qu'vn grave peſe moins, plus il approche du centre de la terre, ou en me niant cette verité vous obliger d'accorder celle de mon ſecond levier. Monſieur de Carcavi à qui je l'avois écrit quelque temps auparavant que de recevoir vos lettres vous le temoignera ſans doute, & j'en ay tiré du moins le profit que vous m'avez accordé qu'un grave peſe moins plus il approche du centre, quoy qu'il ſoit mal aiſé de determiner la proportion de la difference de ces poids; je me contente d'avoir dit ce peu de mots par avance, & viens à la demonſtration de mon ſecond levier, aprés vous avoir aſſuré que jamais homme du monde ne ſe portera avec plus de bonne foy & d'ingenuité que moy à avouer les veritez que j'auray reconnuës, & que je croy ma propoſition tellement vraye, que l'ayant ſouvent conſidérée de divers biais & à diverſes repriſes, je n'ay jamais peu en doûter.

Voicy les vrais principes de ma demonſtration.

Axioma 1. Si grave quieſcens ab aliquo puncto ſuſpendatur, gravitabit ſuper lineam rectam punctum ſuſpenſionis & centrum terræ conjungentem.

Patet axiomatis veritas quia aliter grave non quieſceret. Axioma 2. in vecte circulari cujus dimidium punctum ſuſpenſionis ſi ex utraque parte in punctis æqualium ſectionum gravia æqualia collocentur, corpus ex omnibus illis gravibus compoſitum & à medio ille puncto ſuſpentum quieſcet.

Axioma 3. in vecte circulari ſemicirculo minori cujus centrum eſt centrum terræ (hoc enim in noſtro vecte ſemper intelligendum) ſi punctum ſuſpenſionis inæqualiter vectem dividat, & ex utraque parte in punctis æqualium ſectionum gravia æqualia collocentur, non manebit corpus ex omnibus illis gravibus compoſitum ſed inclinabitur vectis ex parte majoris portionis; hoc patet etiam ex veſtris poſitionibus, cum enim totus vectis ſit ſemicirculo minor, ſinus minoris portionis erit minor ſinu majoris portionis, ideoque non negabitis inclinationem fieri ex parte majoris portionis.

His ſuppoſitis exponatur figura continens vectem D E G, & perficiantur reliqua juxta præparationem Archimedeam, grave in D diſpoſitum per partes æquales in portiones B C, C D, D E, E F, gravitat ſuper rectam D N, nam ſuſpenſum à puncto D, per ſecundum axioma quieſcit, ergo per primum gravitat ſuper D N, igitur ſive totum ſit in D, ſive diſpoſitum per partes æquales in portiones B C, C D, D E, E F, ſemper ſuper eamdem rectam D N gravitat, ſimiliter grave in G, ſive totum ſit in G, ſive per partes æquales F G, G H, diſponatur ſemper ſuper eamdem rectam G N gravitabit, cum autem gravia per partes æquales B C, C D, D E, E F, F G, G H diſpoſita ſint æqualia, gravitabit aggregatum totius gravis ſuper rectam E N, ergo patet concluſio, aut per deductionem ad abſurdum inde facillimè derivatur ope 3. axiomatis.

Eadem certè erat Archimedis ratiocinatio, nam rectæ B D, centrum gravitatis verbi gratiâ in C conſtituit ut probet gravia æqualia in punctis B D, ſuper rectam C N gravitare, quod ille ſupponit cum in librâ tantum D E F hoc verum ſit quæ ad rectam E N, eſt perpendicularis, in reliquis falſum, quia ad angulos inæquales à rectis à centro terræ ſecantur, in noſtro autem vecte hæc difficultas non occurrit cum ſemper & in quocumque puncto rectæ à centro terræ eum normaliter ſecent. Sit libra D C B, centrum terræ A, centrum libræ C, compleatur circulus centro C intervallo C B, deſcriptus & D E A, B A; C F A, jungantur, jungatur & C E, ponantur in punctis B & D, pondera æqualia & ſit angulus ad C D, major angulo A C B, aio libram à puncto C, ſuſpenſam ad partes B inclinari Idque per ſuppoſita ab Archimede pondus à puncto D ad punctum E, transferatur ex Archimede, idem eſt ac ſi pondus eſſet in puncto D, quia ponitur in recta, punctum D, & centrum terræ conjungente, ſi igitur intelligatur recta C E, pondus in E retinere, manebunt ex Archimede brachia C E & C B, cum ponantur manere C B & C D,

igitur anguli E C F, F C B, erunt æquales: triangulùm enim æquicrure in cujus extremis æqualia pondera collocantur, movetur semper donec perpendicularis horizontis, hoc est recta verticem & centrum terræ conjungens angulum ad verticem bisecet, quod experientia testatur ; Angulus autem E C B duplus est anguli ad D, ergo angulus F C B, angulo D est æqualis, parallelæ igitur erunt C A & D A, quod est absurdum, non ergo quiescit libra, sed ad partes B inclinatur quia angulus B C F, major est angulo E C F, ut patet. Voilà en peu de mots ma replique pour le second levier, laquelle j'eusse plus estendue si le temps me le permettoit, que si le levier est plus grand que le demi-cercle comme C A B duquel le point de suspension est A, les extremitez C B, alors le levier ne soutiendra plus, mais sera pressé en haut par ces deux poids, de sorte qu'il faut prendre la proportion reciproque des deux angles CND, DNB, apres avoir prolongé la ligne A N, la demonstration en est aussi aisée que celle du premier cas.

Pour le premier levier, soit le centre de la lettre B, les poids égaux A, & C, & la ligne B C plus grande que B A. Si vous m'accordez que ce poids en C pese plus qu'en A (quoy que vous estimiez qu'il soit mal-aisé d'en determiner la proportion) mes affaires sont faites ; Car il descendra donc, & la méme raison ayant toujours lieu jusques à ce que la ligne C B soit égale à B A, il ne s'arrestera pas plûtôt: & que cela se fasse par attraction ou autrement, la chose est indifferente.

Toutefois je vous puis assûrer que je puis prouver cette mesme proposition par des experiences que vous ne sçauriez contester, & que je vous envoyeray au long de que la commodité me le permettra, cependant voicy une de mes propositions Geometriques, puis qu'il semble que vous ayez desiré d'en voir.

Sit Parabola A B, cujus vertex A & circa rectam D A stabilem figura D A B circumvertatur, describetur conois parabolicus Archimedæus cujus proportio ad conum ejusdem basis & verticis erit sesquialteras quod si circa stabilem D B figura D A B circumvertatur, fiet novus conois cujus proportio ad conum ejusdem basis & verticis quærebatur, eam nos esse ut 8, ad 5, demonstravimus, nec res vacabat difficultate. Imò & centrum gravitatis ejusdem conoidis invenimus.

J'ay trouvé beaucoup d'autres propositions geometriques, comme la restitution de toutes les propositions de locis planis, & autres, mais ce que j'estime plus que tout le reste est une methode pour determiner toutes sortes de problemes plans ou solides, par le moyen de laquelle je trouve l'invention maximæ & minimæ in omnibus omnino problematibus, & ce par une equation aussi simple & aisée que celles de l'analyse ordinaire il y a infinies questions que je n'aurois jamais peu resoudre sans cela, comme les deux suivantes que vous pouvez essayer si vous voulez.

Datæ Sphæræ inscribere conum omnium inscribendorum ambitu maximum.

Datæ Sphæræ inscribere Cylindrum omnium inscribendorum ambitu maximum.

J'entens per ambitum, non seulement superficies conicas & cylindricas, mais le circuit entier compris au cone du cercle de la base & de la superficie conique, & au cylindre des deux cercles des bases & de la superficie cylindrique.

Il semble que ces deux questions sont necessaires pour une plus grande connoissance des figures isoperimetres.

Cette methode ne sert pas seulement à ces questions, mais à beaucoup d'autres, & pour les nombres & pour les quantitez. Vous m'obligerez infiniment de me faire part des productions de vostre esprit, & de me croire, &c.

A Monsieur de Roberval Professeur aux Mathematiques à Paris.

MONSIEUR,

Apres vous avoit remercié de la faveur que vous m'avez faite, & de la peine que vous avez prise, je répondray en peu de mots aux objections que j'ay trouvé dans vôtre Lettre & ce sans aucun esprit de dispute, & pour vous faire seulement approuver la verité de mes propositions.

La premiere objection consiste en ce que vous ne voulez pas accorder que le mitan d'une ligne qui conjoint deux poids égaux descendans librement s'aille unir au centre du monde: en quoy certes il me semble que vous faites tort à la lumiere naturelle & aux premiers principes : car puis que ces deux poids sont égaux, & qu'ils ont tous deux méme inclination pour s'unir au centre du monde s'ils n'estoient pas empéchez, il est clair qu'ils y approcheront tous deux egalement, autrement ayant supposé les poids égaux & les inclinations au centre égales, vous admettriez neantmoins plus de resistance d'un costé, ce qui seroit absurde, & n importe d'alleguer un levier horizontal, lequel estant pressé par deux forces égales aux deux bouts horizontalement, demeure neantmoins en l'estat qu'il est, quoy que l'appuy qui est au dessous le divise en parties inégales, car au cas de ma proposition, la verité de mon principe depend de ce que les deux poids ou puissances, ont naturellement inclination au centre de la terre, & tendent là; & c'est pourquoy n'ayant point d'avantage l'un sur l'autre ils s'y approchent tous deux également ; mais en l'espece du levier horizontal les deux puissances des extremitez n'ont aucune inclination naturelle à l'appuy, mais à s'approcher seulement, & ainsi l'appuy ne doit étre non plus consideré que s'il n'estoit point, outre que jamais personne n'a doûté que le centre d'un grave ne s'unit au centre de la terre s'il n'estoit empéché : or deux graves joints par une ligne qui conjoint leurs centres de gravité ne sont censez constituer qu'un seul grave, duquel le centre de gravité est au mitan de la ligne qui les conjoint; quelle raison donc de croire qu'il s'arreste ailleurs, que lors que son centre sera uny à celuy de la terre ? soint les deux poids égaux A & B joints par la ligne A B, le centre de la terre C, qu'on laisse cheoir librement les poids A & B, lors que le poids B sera au centre C, on ne peut pas dire qu'il s'arreste, parce que les poids A, gravitat super B, & destruit æquilibrium ; où commencera donc le levier A B de s'arrester ? vous ne sçauriez trouver le commancement de son tepos en un point plutôt qu'en l'autre, si ce n'est au mitan, parce qu'il se trouve pour lors également contrebalancé de tous côtez, je ne sçay si ces raisons seront capables de vous faire changer d'avis, mais vous me permettrez bien de vous dire que vous trouverez peu de gens qui suivent vôtre opinion, & qui ne m'accordent ce principe : c'est pourquoy je vous conjure de me dire nettement ce qu'il vous en semble.

La deuxiéme objection est contre la nouvelle proportion des angles que j'ay decouverte, contre laquelle pourtant vous n'avez rien dit de precis, mais seulement que vous avez démonstré que la proportion reciproque des poids doit estre expliquée non pas par les angles, mais par les sinus de ces angles. Voicy la demonstration de ma proposition de laquelle vous verrez aisement par consequent celle de toutes celles que vous avez veues dans l'ecrit que j'envoya à Monsieur de Carcavi.

Sit centrum terræ A, vectis C N B, portio circuli centro A intervallo A N descripti C N, C B æquales circumferentiæ & in punctis C B æqualia pondera, supponimus vectem C B a puncto. N suspensum manere ldemque accidere si gravia

æqualia in quibuſlibet punctis brachiorum C N, N B collocentur, modo hujuſmodi puncta ex utraque parte æqualiter à puncto N diſtent neque enim deſtruent, æquilibrium pondera æqualia à centro terræ & à centro vectis ſive libræ æqualiter diſtantia, ſit centrum terræ A, vectis ſive libra E F B C D, ut ſupra centrum ſive medium libræ punctum B, collocetur pondus B, in puncto B, aut diviſo pondere B, in partes æquales E F B C D, collocentur eæ partes in punctis E F B C D, & ſint intervalla E F, F B, B C, C D, æqualia, ſupponimus pondus B, in puncto B collocatum & à puncto B, ſuſpenſum idem ponderare ac partes E F B C D ſimul ſumptæ in vecte collocatæ & ab eodem puncto B ſuſpenſæ, illud nempe accidit quia propter circulum E F B C D, partes ponderis B, eamdem ſemper ſervant diſtantiam à centro terræ ac pondus ipſum integrum B, quod non animadvertiſſe & deſcenſus gravium parallelos ſuppoſuiſſe errorem peperit Archimedæum. His ſuppoſitis propoſitionem noſtram demonſtramus & cum tantùm caſum in quo tum vectis centrum, tum extrema æqualiter à centro terræ diſtant, quia hic caſus veritatem prioris vectis Geoſtatici non ſupponit, de qua videris ambigere ſit vectis F H, in cujus centrum H, extrema F, & M, in eadem quo punctum H, à terræ centro diſtantia, centro A, intervallo A H, deſcribatur portio circuli F H M, vectis extrema committens & ſit grave in F, ad grave in M, in proportione reciproca circumferentiæ M G, ad circumferentiam H A, aio vectem H F M, à puncto H, ſuſpenſum manſurum & æquilibrium conſtituturum, hanc autem proportionem eamdem eſſe quæ angulorum ad centrum A, patet ex conſtructione & duobus axiomatibus præcedentibus facillimè theorema concludes.

La hâte du Courrier me fait finir là, parce que je ne doûte pas que vous ne puiſſiez voir la concluſion avec un peu de meditation.

Au reſte je vous puis aſſûrer que le Livre qu'il vous a plû m'envoyer eſt ce que j'ay veu de plus ingenieux ſur cette matiere, mais ſi mes propoſitions ſont vrayes, dequoy peut-être vous ne doûterez pas toûjours, vous m'accorderez que ce mouvement ſur les plans inclinez ſe peut prouver encore plus preciſément, ce n'eſt pas que je n'eſtime autant que je dois vôtre invention; Mais ce que le Chancellier Bacon a dit eſt bien vray, multi pertranſibunt, & augebitur ſcientia. Je ſuis, &c.

A Monſieur de Roberval Profeſſeur aux Mathematiques à Paris.

Du 16. Septembre 1636.

MONSIEUR,

Je me trouvay ces jours paſſez à la campagne lors que je répondis à voſtre écrit, que j'avois pourtant laiſſé en cette Ville. Depuis mon retour je l'ay conſideré plus exactement, & vous envoye la réponſe plus preciſe à tous ſes points concernant le premier levier. Si vous ne goûtez pas mes raiſons ſur le ſecond, vous m'obligerez beaucoup de m'envoyer la démonſtration de voſtre propoſition ſuivant l'opinion où vous eſtes, que les graves gardent la proportion reciproque des perpendiculaires tirées du centre du levier ſur les pendans, & de laquelle je doûteray toûjours juſques à ce que je l'auray veüe. Je vous puis pourtant aſſeurer que je ne ſçaurois démordre encore de la mienne, & qu'il me ſemble que vous ne ſçauriez démonſtrer la voſtre, au moins par les prin-

cipes que nous connoissons, permettez moy de changer de matiere, & de vous demander la demonstration de cette proposition que j'advoue franchement que je n'ay encore sceu trouver, quoy que je sois asseuré qu'elle est vraye.

Summa quadratorum à duabus rectis rationalibus longitudine commensurabilibus, si ad duplum summæ laterum applicetur excedens figurâ quadratâ, latitudo excessus erit apotome.

Vous ne sçauriez croire combien la science du dixiéme Livre d'Euclide est deffectueuse, je veux dire que cette connoissance n'a pas encore fait de grands progrés, & qu'elle est pourtant de grandissime usage. J'y ay découvert beaucoup de nouvelles lumieres, mais encore la moindre chose m'arreste, comme le Theoreme que je viens de vous écrire qui semble d'abord plus aisé à démonstrer qu'il n'est pas, j'attends de vos nouvelles, & suis, &c.

Le principe que je vous ay demandé pour l'établissement de mes propositions Geostatiques est, que si deux poids égaux sont joints par une ligne droite ferme, & de soy sans poids; & qu'estant ainsi disposez ils puissent descendre librement, ils ne reposeront jamais jusques à ce que le milieu de la ligne s'unisse au centre commun des choses pesantes, ce principe qui vous a semblé plausible d'abord, a enfin choqué vôtre opinion sur ce principalement que nous ignorons la cause radicale, qui fait que les corps graves descendent, sur quoy vous dites qu'il y a trois opinions differentes, & que de toutes les trois les consequences semblent differentes.

Je ne repete point vos mots, ny vos raisons, je me contente d'y répondre, & primò en la premiere opinion.

En vôtre figure vous dites qu'il vous semble que si le point D, ou E, convient avec le centre commun des choses pesantes, combien que l'un des poids en soit plus proche que l'autre ils contrepeseront encore, & demeureront en equilibre. Puisque, dites vous (pour me servir de vos propres termes) ces deux poids sont égaux, & ont tous deux méme inclination de s'unir au centre commun des choses pesantes, l'un n'a aucun advantage sur l'autre pour le déplacer de son lieu.

Or si ce raisonnement est bon, voyez-le dans la figure suivante dans laquelle j'employeray les mémes mots.

Soit le centre de la terre D, un point dans sa surface ou ailleurs C, soit jointe la ligne CD, & soit au point C, attaché le levier BC, CA, duquel les bras BC, CA, soient égaux & les poids B & A aussi égaux, l'angle BCA ferme. S'il n'y avoit point le poids en B, la ligne CA s'uniroit à la ligne CD, c'est à dire que le poids A s'aprocheroit du centre D, autant qu'il pourroit, & tout de méme de la ligne BC, soit fait l'angle BCD moindre que DCA, par le precedent raisonnement, le levier s'attestera (ce qui est contre l'experience) puis que les deux poids A & B sont égaux, & ont tous deux méme inclination de s'unir au centre D, sive à la ligne CD, & l'un n'a aucun advantage sur l'autre pour le déplacer de son lieu; or de méme qu'en ce cas l'experience nous fait voir que ces deux poids approcheront également du centre D, & de la ligne CD, il ne faut pas doûter qu'au premier cas ils n'aprochent également du centre de la terre, & la raison de toutes ces deux propositions est, qu'ayant méme inclination au centre, & ne pouvant tous deux y descendre, à cause qu'ils s'entrempéchent, ils y approchent du moins également, autrement la force de celuy qui y approcheroit d'avantage seroit plus grande.

L'exemple du levier horizontal ne fait rien à la question; car pour marquer que les poids B & A n'ont pas leur inclination au point C, il ne faut qu'ôter la ligne CD, sur laquelle le levier s'appuye, & le levier ne restera pas de demeurer s'il est pressé par les poids A & B horizontalement, de sorte que le point C n'est non plus considerable que tel autre de ligne BA, que vous prendrés; & cela estant l'exemple est inutile:

parce que la principale raison de mon principe dépend de l'inclination des graves au centre de la terre.

Ce que vous adjoûtez de deux poids,qui seroient inégaux joints comme dessus à une ligne droite ferme, & de soy sans poids, n'est non plus recevable ; car vous accordant que lors que vous niez un plan perpendiculaire à la ligne qui joint les deux poids comme vous faites en vôtre figure, il est certain qu'en ce cas, il y a de chaque costé du centre une grandeur égale. Il arrive pourtant cent cas, ausquels si vous coupez les deux poids par un autre plan passant par le centre, les grandeurs qui seront de chaque costé seront inégales, & ainsi un méme corps en méme temps arrêtera & n'arrêtera pas, & n'importe de dire que ce plan doit être toûjours perpendiculaire à la ligne qui joint les deux graves ; car vous sçavez qu'autour du centre tous endroits sont indifferens, & omnia intelliguntur sursum, omnia deorsum, il faut donc necessairement prendre les repos des poids, non pas de cette façon, mais de la proportion reciproque suivant mon sentiment.

Voilà en peu de mots la réponse à vôtre premiere opinion que j'eusse peu étendre d'avantage & tirer méme la demonstration de mon principe de l'experience que je vous ay donnée, comme il vous sera aisé de voir.

Si la seconde opinion est vraye mon principe est infaillible ; car en ce cas vous dites que le corps pesera d'autant moins qu'il sera proche du centre, mais cette diminution ne sera pas en la raison des éloignemens.

Or puis qu'un corps pese moins en ce cas à mesure qu'il est plus proche du centre, donc il sera toûjours pressé par le plus éloigné, jusques à ce qu'ils soint également éloignez du centre.

En la 3. opinion les mémes raisons sont bonnes, je seray bien aise que Monsieur Pascal voye ma Lettre, si vous l'agreés.

A Monsieur de Roberval Professeur aux Mathematiques à Paris.

Du 22. Septembre 1636.

MONSIEUR,

Je surseoiray avec vôtre permission à vous écrire sur le sujet des propositions de Mechanique jusques à ce que vous m'aurez fait la faveur de m'envoyer la démonstration des vôtres ; ce que j'attends au plûtôt sur la promesse que vous m'en faites. Sur le sujet de la methode de maximis & minimis, vous sçavez que puisque vous avez veu celle que Monsieur Despagnet vous a donnée, vous avés veu la mienne que je luy baillay il y a environ sept ans étant à Bourdeaux, & en ce temps là je me ressouviens que Monsieur Philon ayant receu une de vos Lettres, dans laquelle vous luy proposiez de trouver le plus grand Cone de tous ceux qui auront la superficie conique égale à un cercle donné, il me l'envoya, & j'en donnay la solution à Monsieur Prades, pour vous la rendre, si vous rappellez vôtre memoire, vous vous en souviendrez peut-être, & que vous proposiez cette question comme difficile,& ne l'ayant pas encore trouvée. Si je rencontre parmi mes papiers vostre Lettre, que je garday pour lors, je vous l'envoyeray. Si Monsieur Despagnet ne vous a proposé ma methode que comme je la luy baillay pour lors, vous n'avez pas veu ses plus beaux usages. Car je la fais servir en diversifiant un peu, Premierement pour l'invention des propositions pareilles à celle du Conoide que je vous envoyay par ma derniere. 2. Pour l'invention des tangentes des lignes courbes, sur lequel sujet je vous propose ce probleme, ad datum punctum in

conchoide

conchoide Nicomedis invenire tangentem. 3. Pour l'invention des centres de gravité de toute ſorte de figures aux figures mémes differentes des ordinaires comme en mon Conoide & autres infinies ; dequoy je fairay voir des exemples quand vous voudrez. 4. Aux problemes numeriques, auſquels il eſt queſtion de parties aliquotes, & qui ſont tous tres-difficiles. C'eſt par ce moyen que je trouvay 672. duquel les parties ſont doubles auſſi bien que celles de 120. le ſont de 120, c'eſt auſſi par là que j'ay trouvé de nombres infinis qui font la méme choſe que 220.& 284.c'eſt à dire que les parties du premier égalent le ſecond, & celles du ſecond le premier, dequoy ſi vous voulez voir un exemple pour tâter la queſtion, ces deux y ſatisfont 17296. & 18416. je m'aſſûre que vous m'advouerez que cette queſtion & celles de ſa ſorte ſont tres-mal-aiſées ; j'en envoyay il y a quelque temps la ſolution à Monſieur de Beaugrand ; j'ay auſſi trouvé des nombres en proportion donnée ou qui ſurpaſſent d'un nombre donné leurs parties aliquotes & pluſieurs autres. Voilà quatre ſortes de propoſitions que ma methode embraſſe, & que peut-eſtre vous n'avez pas ſceües : ſur le ſujet du premier j'ay quarré infinies figures compriſes de lignes courbes, comme par exemple ſi vous imaginez une figure comme la parabole, en telle ſorte que les cubes des appliquées ſoient en proportion des lignes qu'elles coupent du Diametre, cette figure approchera de la parabole, & ne differe qu'en ce qu'au lieu qu'en la parabole on prend la proportion des quarrez, je prends en celle-cy celle des cubes (& c'eſt pour cela que Monſieur de Beaugrand, à qui j'en fis la propoſition, l'appelle parabole ſolide) or j'ay démonſtré que cette figure eſt au triangle de méme baſe & hauteur, en proportion ſeſquialtere. Vous trouverez en la ſondant qu'il m'a falû ſuivre une autre voye que celle d'Archimede en la quadrature de la parabole, & que je n'y fuſſe jamais venu par là. Puiſque vous avez trouvé ma propoſition du Conoïde excellente, la voicy plus generale.

Si circa rectam D A parabole (cujus vertex B & axis B F & applicata A D) circumducatur, fiet conoides novæ ſpeciei, quo ſecto bifariam plano ad axem recto, dimidium ipſius ad conum ejuſdem baſis & altitudinis eſt ut 8. ad 5. Si verò plano ſecetur ad axem recto inæqualiter, puta per punctum E, ſegmentum conoidis A B C E ad conum ejuſdem baſis & altitudinis eſt ut quintuplum quadrati E D unà cum rectangulo A E D bis & rectangulo ſub D F, & A E ad quadrati E D quintuplum, & viciſſim ſegmentum conoidis D C E eſt ad conum ejuſdem baſis & altitudinis ut quintuplum quadrati A E, unà cum rectangulo A E D bis, & rectangulo ſub D F & D E ad quadrati A E quintuplum.

Pour la demonſtration, outre les aydes que j'ay tirées de ma methode, je me ſuis ſervi des cylindres inſcrits & circonſcrits.

J'avois obmis le principal uſage de ma methode qui eſt pour l'invention des lieux plans & ſolides, elle m'a ſervi particulierement à trouver ce lieu plan que j'avois auparavant trouvé ſi difficile. Si à quotcumque datis punctis ad punctum unum inflectantur rectæ, & ſint ſpecies quæ ab omnibus fiunt dato ſpatio æquales, punctum continget poſitione datam circumferentiam.

Tout ce que je viens de vous dire ne ſont qu'exemples ; car je vous puis aſſûrer que ſur chacun des points precedents, j'ay trouvé un tres-grand nombre de tres-belles propoſitions. Je vous envoyeray la demonſtration de celles que vous voudrez. Permettez-moy neantmoins de vous prier de les eſſayer plûtôt, & de m'en donner vôtre jugement. Au reſte depuis la derniere Lettre que je vous écrivis, j'ay trouvé la demonſtration de la propoſition que je vous faiſois, elle m'a donné grandiſſime peine, & ne ſe preſente pas d'abord. Je vous conjure de me faire part de quelqu'une de vos penſées, & de me croire, &c.

Lettre de Monsieur de Roberval à Monsieur de Fermat.

Du 11. Octobre 1636.

MONSIEUR,

Je vous envoye la demonstration de la proposition fondamentale de nostre Mechanique, ainsi que ie vous l'ay promis. En quoy je suivray l'ordre commun d'expliquer auparavant les definitions & principes desquels nous nous servons.

Nous appellons en general une puissance cette qualité par le moyen de laquelle quelque chose que ce soit tend ou aspire vers un autre lieu que celuy ou elle est, soit en bas, en haut, ou a costé: soit que cette qualité convienne naturellement à la chose, ou qu'elle luy soit communiquée d'ailleurs. De laquelle definition il s'ensuit que tout poids est une espece de puissance, puisque c'est une qualité, par le moyen de laquelle les corps aspirent vers la partie inferieure. Souvent nous appellons aussi du nom de puissance la chose méme, à laquelle la puissance convient, comme un corps pesant est appellé un poids; mais avec cette precaution que ce soit à l'égard de la vraye puissance, laquelle augmentant ou diminuant, sera appellée plus grande ou moindre puissance, quoy que la chose à qui elle convient demeure toûjours la méme.

Si une puissance est pendue ou arrestée à une ligne flexible & sans poids, laquelle ligne soit attachée par un point à quelque arrest, en sorte qu'elle soustienne la puissance tirant sans empeschement contre cette ligne; la puissance & la ligne prendront quelque position, en laquelle elles demeureront en repos, & la ligne sera droite par force; soit icelle ligne appellée le pendant ou la ligne de direction de la puissance; & le point par lequel la ligne est attachée à l'arrest, soit appellé le point d'appension, lequel pourra estre quelquefois au bras d'un levier, ou d'une balance, & lors la ligne droite ménée du centre de l'appuy du levier ou de la balance; jusques au point d'appension, soit appellée la distance ou le bras de la puissance, laquelle distance ou bras nous supposons étre une ligne ferme considerée de soy son poids. D'avantage l'angle compris du bras de la puissance & de la ligne de direction, soit appellé l'angle de la puissance. Apres ces definitions nous posons pour principe qu'au levier, & à la balance, les puissances égales
1. Axiome. titans par des bras égaux, & des angles de direction égaux, tireront également; & si en cét estat elles tirent l'une contre l'autre, elles feront equilibre; que si elles tirent ensemble ou de méme part, l'effet sera double.

Si les puissances estans égales, & les angles de direction égaux, les bras sont inégaux, la puissance qui sera sur plus grand bras fera plus d'effet. Comme en la 1. figure le centre de la balance, ou du levier, estant A, si les bras A B, A C sont égaux, & les angles A B D, A C E égaux, les puissances égales D E, tireront également, & fairont equilibre; de méme le bras A F estant égal à A B, l'angle A F G à l'angle A B D, & la puissance G a la puissance D, ces puissances G, D, tireront également, & pour ce qu'elles tirent de méme part, l'effet sera double: au contraire la puissance G & la puissance E, feront equilibre. Par le méme principe les puissances I, L, contrepeseront si étans égales les bras A K, A H sont égaux & les angles A H I, A K L aussi égaux. Il en sera de méme des puissances P, R, si le tout est disposé de méme. Et en ce cas nous ne mettons point d'autre difference entre les poids & les autres puissances, sinon que les poids tendent & aspirent tous vers le centre des choses pesantes; & les puissances peuvent estre entendues aspirer vers toutes les parties de l'Univers, avec autant, plus, ou moins de forces que les poids. Aussi les poids & leurs parties tirent par des lignes de direction qui toutes concourent à un méme point; & les puissances & leurs parties peuvent étre

entendües tirer de telle sorte que toutes les lignes de direction soient paralleles entre elles.

En second lieu nous posons qu'une puissance & sa ligne de direction demeurans toû- 2. Axiome.
jours en méme position; & le centre de la balance, ou du levier, de méme; quel que puisse etre le bras mené du centre de la balance à la ligne de direction, la puissance tirant de soy toûjours de méme sorte, fera toûjours méme effet. Comme en cette 2. figure le centre de la balance estant A, la puissance B & sa ligne de direction B F prolongée, tant que de besoin, à laquelle aboutissent les bras A C, A G, A F. En cét estat soit que la ligne B F soit liée au bras A F ou A C ou A G, ou à un autre bras mené du centre à la ligne de direction A F, nous supposons que cette puissance B fera toûjours un méme effet sur la balance : & si tirant par le bras A C elle fait equilibre avec la puissance D tirant par le bras A E; lors qu'elle tirera par le bras A F, ou A G, elle fera encore equilibre avec la puissance D tirant par le bras A E. Ce principe quoy qu'il ne soit pas expressement dans les autheurs, est neantmoins usurpé tacitement par tous ceux qui en ont eu affaire, & l'experience le confirme constamment.

En troisiéme lieu nous posons, que si les bras d'une balance ou d'un levier sont dire- 3. Axiome.
ctement posez l'un à l'autre, & qu'estans égaux, ils soustienent des puissances egales desquelles les angles de direction soient droits, ces puissances peseront également sur le centre de la balance, soit qu'elles soient proche du méme centre, soit qu'elles en soient fort éloignées, soit que toutes deux soient ramassées au méme centre. Comme en la troisiéme figure la balance étant E D, le centre A, les bras égaux A D, A E soûtenans des puissances égales H, I, desquelles les angles de direction A D H, A E I soient droits; nous supposons que ces puissances I, H, peseront de méme sur le centre A que si elles étoient plus prés du méme centre sur les distances égales A B, A C, & encore de méme que si ces mémes puissances étoient ensemble pendues en A, ces angles de direction estans toûjours droits.

Ces principes posez, nous demonstrons facilement, imitans Archimede, que sur 1. Prop.
une balance droite, les puissances desquelles & de toutes leurs parties les lignes de direction sont paralles entre elles, & perpendiculaires à la balance, contrepeseront & feront equilibre, quand les mémes puissances seront entre elles en proportion reciproque de leurs bras, ce que nous pensons vous étre aussi facile qu'à nous. En suite dequoy nous demonstrons cette proposition universelle, à laquelle nous butons.

En toute balance ou levier si la proportion des puissances est reciproque à celle des
lignes perpendiculaires du centre ou point de l'appuy, sur les lignes de direction des 2. Prop.
puissances, ces puissances tirans l'une contre l'autre feront equilibre : & tirans d'une méme part, elles feront un pareil effet; c'est à dire qu'elles auront autant de force l'une que l'autre pour mouvoir la balance. Soit en la 4. figure le centre de la balance A, le bras A B plus grand que le bras A C; & soient premierement les lignes de direction B D, C E perpendiculaires aux bras A B, A C; par lesquelles lignes tirent les puissances D E, (lesquelles seront des poids si on veut) & qu'il y ait méme raison de la puissance D à la puissance E que du bras A C au bras A B, les puissances tirans l'une contre l'autre : je dis qu'elles feront equilibre sur la balance C A B. Car soit prolongé le bras C A jusques en F, en sorte que A F soit égale à A C, & soit considerée C A F comme une balance droite de laquelle le centre soit A : soient aussi imaginées deux puissances G, H, desquelles, & de toutes leurs parties, les lignes de direction soient paralleles à la ligne C E; & que la puissance G soit égale à la puissance D, & la puissance H égale à la puissance E, l'une sçavoir G tirant sur le bras A F, & l'autre sçavoir H tirant sur le bras A C. Lors par la premiere proposition, les puissances G, H, feront equilibre sur la balance C A F. Mais par le 1. principe la puissance D sur le bras A B, fait le méme effet que la puissance G sur le bras A F; partant la puissance D sur le bras A B fait equilibre avec la puissance H sur le bras A C; & la puissance H tirant de meme que la puissance E sur

le bras A C par le méme premier principe, la puiſſance D ſur le bras A B ; faira equilibre avec la puiſſance E ſur le bras A C. Maintenant en la 5. fig. ſoit le centre de la balance A ; les bras A B, A C ; les lignes de direction B D, C E qui ne ſoint pas perpendiculaires aux mémes bras ; & les puiſſances D, E, tirans par les mémes lignes de direction ; ſur leſquelles lignes ſoint ménées des perpendiculaires du centre A, ſçavoir A F ſur B D & A G ſur E C : & que comme la ligne A F eſt à A G ainſi ſoit la puiſſance E à la puiſſance D, leſquelles puiſſances tirent l'une contre l'autre, je dis qu'elles faitont equilibre ſur la balance C A B. Car ſoint imaginées les lignes A F, A G comme les deux bras d'une balance G A F, ſur leſquels tirent les puiſſances D, E, par les lignes de direction F D, G E, ces puiſſances fairont equilibre par la premiere partie de cette 2. prop. Mais par le 2. principe la puiſſance D ſur le bras A F fait le méme effet que ſur le bras A B ; & la puiſſance E ſut le bras A G fait le méme effet que ſur le bras A C ; partant la puiſſance D ſur le bras A B, fait equilibre avec la puiſſance E ſur le bras A C. Il y a pluſieurs cas ſuivant les cheutes des perpendiculaires, mais il vous ſera facile de voir que tous n'ont qu'une méme demonſtration. Il eſt auſſi facile de demonſtrer que ſi les puiſſances tirent de méme part, elles faitont méme effet l'une que l'autre, & l'effet des deux enſemble ſera double de celuy d'une ſeule.

J'attens vôtre jugement ſur cette demonſtration, & ſi vous l'approuvez nous communiquerons en ſuite des conſequences qui en dépendent. J'ay trouvé la demonſtration de la ſomme des quarrez de deux coſtez rationaux commenſurables en longueur, appliquée au double de la ſomme des coſtez, excedant d'une figure quarrée : mais puia que vous l'avez auſſi trouvée, je ne vous diray ici que mon principal fondement, qui eſt que de deux nombres quelconques, la ſomme de deux fois le quarré du premier, deux fois le quarré du ſecond, & deux fois le produit des deux nombres, n'eſt pas un nombre quarré, d'autant que prenant lea moindres nombres de leut raiſon, un nombre ſimplement pris n'eſt pas quarré. Si nous avons tous deux un méme moyen, cecy ſuffit, ſi vous en avez un autre, ce que vous reconnoiſtrez par ce diſcours, vous me fairez faveur de me l'apprendre, & moy je voua écritay le mien tout au long, ſi vous le deſirez.

J'ay auſſi trouvé la demonſtration de vôtre conoide, & celle de vôtre parabole ſolide, & en conſequence, celles d'une infinité d'autres pareilles quarre-quarrées, quarte-ſolides, &c. J'ay trouvé les tangentes de toutes ces figures : par exemple en la parabole ſolide la portion de l'axe, priſe entre la tangente & le ſommet, eſt double de la portion du méme axe, priſe entre le ſommet & la ligne appliquée de l'attouchement à l'axe. J'ay par le méme moyen quarré la parabole geometriquement autrement qu'Archimede. Et je me trompe fort ſi je n'ay rencontré le méme moyen que vous, me ſervant des lignes paralleles à l'axe, & des portions de ces lignes, priſes entre les paraboles & la ligne qui touche les mémes paraboles par le ſommet, leſquelles portions ſe ſuivent en la taiſon de l'ordre naturel des nombres quarrez ou des nombres cubes, &c. Or la ſomme des quarrez eſt toûjours plus que le tiers du cube qui a pour coſté le coſté du plus grand quarré : & la méme ſomme des quarrez, le plus grand eſtant oſté eſt moindre que le tiers du méme cube. La ſomme des cubes plus que le quart du quarre-quarré ; & le plus grand cube oſté, moins que le quart, &c. Si par ce diſcours vous reconnoiſſez que ce n'eſt pas vôtre moyen, j'en ſeray d'autant plus réjoüi pour ce que noua en aurons deux, & vous me fairez la faveur de m'envoyer le vôtre faiſant le méme de ma part.

Pour les tangentes de la conchoide, je les ay conſiderées il y a long-temps, comme étans determinations d'equations quarre-quarrées. Sur ce ſujet il y a deux points en la conchoide, par leſquels on ne peut mener des tangentes, je vous prie de les conſiderer, & vous trouverez une admirable proprieté d'angles au ſommet l'un de l'autre à la ſection d'une ligne droite & de la conchoide.

J'estime vos propositions des nombres & celle du lieu plan fort difficiles ce que je sçauray mieux quand j'auray eu le loisir de les considerer comme aussi les centres de gravité des figures susdites tant planes que solides; n'estant pas resolu pourtant de m'obstiner apres; car j'aimeray mieux tenir de vous ce que vous en aurez, si vous l'avez agreable. Je vous prie pourtant de me mander si le centre de gravité de vôtre demi-conoide n'est pas ce point ou l'axe est divisé, de sorte que l'un des segments est à l'autre comme 11. à 4. pour ce qu'un leger raisonnement, & non encor bien consideré m'a semblé me mener à cette raison.

Une autre fois je vous pourray mander de nos propositions ainsi que vous le desirez: pour cette heure que je n'employe à écrire cecy qu'un temps dérobé, je vous envoyeray seulement celle-cy. De deux cones droits égaux & isoperimetres estans données les bases inégales, ou les hauteurs inégales, trouver les cones. Quand je dis isoperimetres, j'entens les bases y comprises ou exceptées, comme vous voudrez. Vous en aurez la solution quand il vous plaira, si vous ne voulez prendre la peine de la trouver vous méme, & je vous l'aurois envoyé des maintenant, n'estoit que je croy que vous desirerez d'avoir le plaisir d'y penser. Attendant que vous me fassiez la faveur de m'écrire, je demeureray, &c.

Objecta à D. de Fermat,

Adversus propositionem Mechanicam D. de Roberval.

Si vera esset propositio Mechanica D. de Roberval, in vecte quolibet, pondera perpendiculis à centro vectis in lineas directionum demissis esse reciprocè proportionalia ad astruendam quietem, non posset subsistere proportio gravis ad potentiam in plano inclinato, quam in libello suo tradidit. Hoc perspicuè demonstramus.

In 1. figura, esto punctum in superficie telluris N, centrum terræ H, junctâ N H, ducatur A N G F, perpendicularis ipsi H N, quam quidem A N G F, ii qui sunt in puncto N, vocant parallelam horizonti. Exponantur sphæræ quarum centra B, C, D, quæ tangant rectam sivè planum per A N G F, in punctis N, G, F.

Patet primùm Sphæram B, à minima potentia moveri, idque D. de Roberval non diffitetur, & in puncto N collocatam, manere, sed in nullo alio totius plani puncto idem accidit. Perficiatur figura ut hic vides. Recta H G, connectens punctum contactus G, & centrum terræ H, ad rectam C G, facit angulum obtusum ideoque sphæra C, ad partes G N, movebitur. Idem de sphæra D. Sit igitur potentia in Z, retinens sphæram C, per motum rectæ A N G F, parallelum aut quod idem est per rectam Z C. Intelligitur vectis cujus centrum fixum G, ducatur in H C, perpendicularis G C Sphæræ C, motus naturalis est per rectam C H. Motus retinens per C Z ad quam perpendicularis est G C. Ergo ex suppositis D. de Roberval est reciprocè ut recta G I, ad rectam G C, ita potentia retinens in Z ad sphæram C, quod erat demonstrandum. In sphæra autem D, major requiretur potentia ad retinendum, & quo magis distabit à puncto N, eò majore potentia opus erit, quod est mirabile.

Ex suppositione autem D. de Roberval numquam in eodem plano variat proportio, quod quam longe abeat à veritate ipse videris.

Sit centrum terræ B, Planum inclinatum A C D C, in punctis A & C, eamdem potentiam retinere, poterat fortasse non incongruum videri D. de Roberval. Sed ducto perpendiculo E D, eum in puncto D sit quies. & minima potentia retineat, qua ratione constabit ipsius propositio?

In quolibet autem plano habet locum nostra demonstratio. Omne quippe planum alicui horizonti invenietur parallelum.

Hac propositione evertitur demonstratio Domini de Roberval & brevissimâ viâ ad ipsius hypotheses nova proportio detegitur.

Secundam figuram addideramus, qua judicium nostrum de ipsius ultima propositione prodere sperabamus. Sed non suppetit tempus.

Nova in Mechanicis Theoremata D. de Fermat.

FUndamenta Mechanices non satis accurata tradidisse Archimedem fueram dudum suspicatus, supposuisse enim motus gravium descendentium inter se parallelos patet, nec vero absque hac hypothesi constare possunt ipsius demonstrationes: Non inficior quidem hypothesim hanc ad sensum proxime accommodari, quippe propter magnam a centro terræ distantiam possunt descensus gravium supponi paralleli non secus ac radij solares: sed veritatem intimam & accuratam quærentibus, hæc non satisfaciunt. Generalis nempe vectium natura in quolibet mundi loco videtur consideranda & astruenda ideoque nova in mechanicis fundamenta e veris & proximis principiis accersenda: Hujus novæ scientiæ propositiones tantum exhibemus, demonstrationes cum libuerit, tradituri.

Duplex igitur vectium genus fingimus aut potius consideramus unum cujus motus rectus tantùm est non circularis, alterum cujus extrema describunt circulos, de secundo hoc quæsitum tantùm apud veteres; primum quod longè videtur simplicius, nè agnoverunt quidem.

Singula exemplis illustramus & prioris quidem centrum idem est cum centro terræ, posterioris centrum extra centrum terræ necessariò debet collocari.

Sit igitur in sequenti figura centrum terræ punctum A, & intelligatur recta C B, transire per centrum A, imò & ipsa A B, intelligatur esse vectis & in punctis B & C, collocentur gravia B & C, sitque pondus B, ad pondus C, ut recta C A, ad rectam A B, aio vectem C B, mansurum & æquilibrium in hoc casu constituturum. Si vero deminuatur tantisper grave B, movebitur vectis in rectum per centrum A ad partes C, donec pondera distantiis à centro sint reciprocè proportionalia. Hæc est prima propositio cujus respectu terra ipsa magnus vectis dici potest ad imitationem Gilberti qui eam magnum magnetem vocat.

Hoc posito, mirabilius quiddam proponimus, gravia nempe eò facilius tolli à potentia in superficie terræ aut alibi constituta quò propiora fuerint centro terræ.

Sit centrum terræ A punctum C, extra centrum jungatur recta C A, in qua sumpto puncto B, collocetur grave in B. Si intelligamus grave B, per filum aut axem C B, suspensum, detinebitur à potentia in C, collocata cujus proportio sit ad pondus B, ut recta A B, ad rectam A C.

Indeque facillimè deducitur & demonstratur gravia in centro non ponderare, cujus rei demonstrationem hactenus quæsitam jam novimus.

Secundùm vectium genus Archimedæum dici potest. Sed reciproca distantiarum cum ponderibus proportio (quam in vecte simplici demonstravimus) in hoc habere locum non potest, nec ideò subsistere sexta & septima Archimedis propositio.

Ita igitur confidenter pronuntiamus & vectem generaliter sive brachia, sive in directum, sive parallela horisonti, sive etiam angulum constituant, consideramus.

Una quippe demonstratione totum evincimus. Sit vectis extra centrum terræ D B C. cujus centrum B, Brachia B D, & B C, centrum terræ A, jungantur rectæ D A, B A, C A, &

in punctis B & C, collocentur gravia, sitque proportio gravis D, ad grave C, composita ex proportione rectæ D A, ad rectam C A, & reciprocè ex angulo C A B ad angulum B A D. Aio vectem B D C à puncto B suspensum mansurum & æquilibrium constituturum.

Hanc propositionem sicut & reliquas verissimas asseveramus, & cum libuerit, demonstrationibus ex puriore Geometria & Physica derivatis confirmabimus.

Inde patet corruere omnino veterum de centris gravitatum definitiones, nullum quippe corpus præter Sphæram potest reperiri in quo punctum reperiatur à quo grave extra centrum terræ suspensum, servet eam quam in principio habuerit positionem.

Definietur ergo deinceps centrum gravitatis cujusque corporis, punctum intra corpus positum, quod si cohæreat centro terræ, corpus eam servabit quam in principio habuerit positionem: eo enim solum casu habent locum centra gravitatis.

Demonstrabitur etiam & refelletur error Ubaldi & aliorum qui existimant libræ brachia licet non sint parallela horizonti æquilibrium tamen constitutura.

Sit centrum terræ B, semidiameter B A, portio alterius semidiametri BC, & fiat ut A B, ad B C, ita pondus appensum in C ad pondus appensum in A. Aio pondera A C non moveri, sed fieri æquilibrium, hæc autem propositio probatu facillima est vestigiis Archimedis insistendo. Et, si negetur, statim demonstrabitur.

Hoc supposito, propositionem sanè mirabilem inde deducimus. Ponatur grave in puncto N, inter puncta A & B, & fiat ut A B ad B N ita pondus N ad potentiam R. Aio pondus N juncto axe AN à potentia R in puncto A collocata detineri, & si minimùm augeatur potentia R, sursum tolli, ideoque quò propius pondus accedit ad centrum terræ, minorem potentiam ad tollendum illud requiri.

Hæc est, ni fallor, propositio quam Beaugrandus in sua Geostatica demonstrat; nos eam hac ratione, quæ sequitur, demonstramus.

Propositio Geostatica D. de Fermat.

Suppositis & concessis quibus in demonstratione utimur, ex præcedente propositione, & ex communibus notionibus desumptis.

Sit centrum terræ C, semidiameter CA in qua sumatur punctum B, in puncto autem B sit quodvis grave appensum. Fiat autem ut recta CA, ad rectam CB, ita pondus in B appensum ad potentiam aliquam ut R. Aio grave B à potentia R in puncto A sustineri, & si augeatur quantumlibet potentia R, pondus B ab hujusmodi auctâ potentiâ in puncto A collocatâ sursum moveri, producatur enim AC in D, & sit CD, æqualis CB. Et in D collocetur pondus ponderi B æquale. Corporis igitur ex duobus gravibus B & D compositi centrum gravitatis est C, ideoque si à puncto A auferatur potentia R, cum recta B A, nihil ponderet, erunt pondera B & D in æquilibrio & manebunt. Si autem in A, collocetur pondus deorsum tendens potentiæ R sursum moventi æquale, idem est ac si à puncto A dematur potentia R, nam quantum potentia tollit tantumdem pondus deprimit. Collocetur igitur hujusmodi pondus in A, corpus igitur compositum ex potentia R collocata in A, & sursum movente, ex pondere A, deorsum tendente, & ex gravibus B & D erit in æquilibrio, aut, si mavis, non movebitur. Cum autem grave D, sit æquale gravi B & recta CD rectæ C B, erit ut AC ad CD: ita AC ad C B, & ut pondus B ad potentiam R in A collocatam, ita pondus D ad pondus in A deorsum tendens (quod ipsi R potentiæ æquale posuimus) est autem ex hypothesi ut recta A C ad C B, ita pondus B ad potentiam R in A collocatam. Erit igitur ut A C ad C D, ita pondus D ad pondus in A deorsum tendens. Cum igitur distantiæ ponderibus sint reciprocè proportionales

pondus in A deorsum tendens ponderi D æquiponderabit. Si verò ab æquiponderantibus æquiponderantia auferantur, reliqua æquiponderabunt. Ergo si ab æquilibrio ex potentia R in A collocata & sursum movente, ex pondere in A deorsum tendente & ponderibus B & D composito, auferatur æquilibrium ex ponderibus A & D composito, reliqua æquiponderabunt, aut potiùs non movebuntur. Auferantur igitur pondus A & pondus A D. Remanebit potentia R in A collocata, & pondus B. Quod proinde potentia R detinebit. Ideoque si minimâ augeatur vi, sursum tollit G E D.

Propositio D. de Fermat circa parabolen.

PRopofui per data 4. puncta parabolen describere. Duplex est casus, utrique lemma sequens præmittendum.

Sit parabole in 1. fig. E C B A D cujus diameter A F detur positione, dentur etiam duo puncta B & C, per quæ transit parabole, dentur denique anguli applicatarum ad diametrum A F. Aio parabolen positione dari. Applicentur ordinatim B N & C M, à puncto dato B in A F, positione datam ducitur B N in dato angulo (positum quippe est dari angulum applicatarum) ergo datur punctum N, similiter datur punctum M & rectæ B N, C M positione & magnitudine: Ex natura paraboles est ut quadratum C N ad quadratum B N, ita M A ad N A, si ponas A esse verticem paraboles sive extremum diametri. Ergo datur ratio M A ad N A & dividendo datur ratio M N ad N A, datur autem recta M N, quia duo puncta M, N dantur, datur igitur N A & punctum A. Si fiat ut A N data ad N B datam, ita N B ad Z, dabitur Z rectum paraboles latus. Dato igitur vertice A, Z recto latere, A F diametro positione, angulo applicatarum, datur positione parabole, ex 52. 1. Apoll.

Hoc supposito facillimè construitur primus casus in 2. fig. in qua dentur 4. puncta D, B, C, F, quæ si jungas per rectas, B C, C F, F D, D B, vel neutra oppositarum erit alteri parallela, vel ut in hoc casu erit B C verbi gratia parallela D F. Bifariam utraque dividatur in punctis I & E & sit factum, ergo juncta I E erit diameter paraboles cum æquidistantes bifariam dividat, dantur autem puncta I & E, ergo I E positione datur & angulus D E I. Cum igitur diameter I E positione detur, detur etiam angulus applicatarum & duo puncta B & D per quæ transit parabole, dabitur positione parabole D B A C F.

In 2. casu major est difficultas, cum neutra rectarum duo ex punctis datis conjungentium alteri est æquidistans.

In 3. fig. sint data 4. puncta X, N, D, R, quæ per rectas X R, R D, D N, N X, conjungantur, & neutra oppositarum sit alteri æquidistans. Ponatur jam factum esse, & descriptam parabolen X A N D B R, proposito satisfacientem. Concurrant productæ X N, R D, in puncto V, & bifariam divisis X N, R D, in punctis M & C, ducantur ad ipsas diametri M A, C B, occurrentes parabolæ in punctis A, & B, à quibus rectæ I A S, S B ipsis X V, V R, ducantur æquidistantes, & concurrant in puncto S. Juncta A B bifariam dividatur in P & jungatur S P, his ita constructis patet, cum per verticem diametri M A ducatur I A S, æquidistans applicatæ X N, rectam I A S tangere parabolen in A, probabitur similiter rectam S B tangere eamdem parabolen in B, ergo per 16. 3. Apoll. erit ut rectangulum X V N ad rectangulum R V D, ita quadratum A S ad quadratum S B. Datur autem ratio rectanguli X V N ad rectangulum R V D, cum dentur 4. puncta X N D R, ergo datur ratio quadrati A S ad quadratum S B, ideoque rectæ A S ad rectam S B. Datur autem angulus A S B, quia propter parallelas æquatur angulo X V R, dato. Ergo in triangulo A S B datur angulus ad verticem S & ratio laterum A S, S B, ideoque triangulum A S B datur specie, igitur datur angulus S A B & ratio S A ad A B, cum autem

autem AP sit dimidia AB, datur etiam ratio SA ad AP, in triangulo igitur S A P datur angulus ad A, & ratio laterum S A, A P, datur igitur specie & angulus P S A datur. Hoc posito cum recta SP rectam AB puncta contactuum conjungentem bifariam dividat, erit diameter paraboles, ex 29. 2. Apoll. In parabolâ autem omnes diametri sunt inter se æquidistantes, ergo diameter M A rectæ S P æquidistabit, ideoque angulus I A M, æquabitur angulo A S P, probavimus autem dari angulum A S P, ergo dabitur angulus I A M & ipsi alternus propter parallelas N M A, datur autem punctum N quia rectam N X positione & magnitudine datam bifariam dividit. Ergo datur diameter M A positione, datur etiam angulus applicatarum A M N, & dantur duo puncta N & D per quæ transit parabole. Datur igitur parabole positione ex lemmate, & est facilis ab analysi ad synthesim regressus.

Patet autem duas parabolas in hoc secundo casu propositum adimplere, concurrent enim rectæ D N & X R, quas posuimus non esse parallelas : hoc casu eâdem argumentatione nova construetur parabole proposito satisfaciens.

Lettre de M. de Fermat au R. Pere Mersenne de l'Ordre des Minimes.

MON REVEREND PERE,

Puis que j'ay esté assez heureux pour vous oster l'opinion que vous aviez eue que j'eusse suivi en ma proposition le méme raisonnement que Monsieur de Beaugrand, j'espere qu'avec la méme facilité je vous osteray tous les autres scrupules. 1. Vous avez creu que ma proposition étoit la méme que celle de M. de Beaugrand & ce par deux raisons, l'une que je l'avois écrit lors que je l'envoyay à Mr. de Carcavi ; l'autre qu'elle semble conclurre la méme chose. Pour le premier, je vous réponds que lors que j'envoyay ladite proposition, je n'avois pas veu encore le livre de M. de Beaugrand, & n'avois sçeu si ce n'est qu'il écrivoit du divers poids des graves secundùm varia à terræ centro intervalla, si bien que là dessus j'imagina la proposition que vous avez veuë, & creus que peut-étre ce seroit la méme que celle de M. de Beaugrand, & l'écrivis ainsi à mondit sieur de Carcavi, mais depuis ayant veu le livre de Mr. de Beaugrand, j'ay trouvé que son opinion est differente de la mienne en ce qu'il suppose que le grave en soy, se rend ou plus pesant ou plus leger selon l'éloignement ou l'approche du centre, & moy je soûtiens (en quoy je répondray à vôtre seconde raison) qu'en soy il ne change point de poids, mais qu'il est tiré avec plus ou avec moins de force, ce qui est bien different du reste.

Soit le centre de la terre C, le grave B au point B & le point D dans la superficie, Mr. de Beaugrand tient que si on pese le grave B dans le point B on le trouvera plus leger que si on le pese au point D. Et moy je dis que si on pese le grave B dans le point B, on le trouvera de méme poids que s'il étoit pesé au point D ; & qu'en tout cas quand bien cela ne seroit pas (car ma proposition ne depend nullement de la sienne) que le grave B sera soûtenu plus aisément par une puissance qui sera au point D, que par une autre puissance qui en sera plus proche, & en la proportion que j'ay assignée. Vous ne devez pas douter que ma demonstration ne concluë parfaitement, bien qu'il semble que Monsieur de Roberval ne l'a pas trouvée precise. Je vous puis donc asseurer que toutes les propositions que j'ay mises dans mon écrit sont parfaitement vrayes, & de cela je n'en veux pas étre creu que lors que j'auray mis par écrit toutes les demonstrations sur cette matiere. Je suis si peu ambitieux que si j'avois trouvé erreur en ce que je vous ay écrit je ne ferois nulle difficulté de l'advoüer. Je suis, &c.

Lettre de M. de Fermat à Monsieur de Roberval à Paris.

Du 4. Novembre 1636.

MONSIEUR,

Me reservant à vous écrire une autre fois les defauts que j'ay trouvé dans vôtre demonstration & dans vôtre Livre imprimé, que j'espere vous faire advoüer par vos propres maximes, je me contenteray de répondre presentement aux autres points de vôtre Lettre, & premierement vous sçaurez que nous avons concouru au méme medium sur le sujet de la somme des deux quarrez rationaux commensurables en longueur appliquée au double de la somme des côtez, excedant d'une figure quarrée. Vous vous estes servy aussi d'un méme medium que moy en la quadrature des paraboles solides quarre-quarrez, & à l'infini; mais vous supposez une chose vraye, de laquelle vous n'avez pas peut-être la demonstration précise, qui est que la somme des quarrez est plus que le tiers du cube, qui a pour costé le costé du plus grand quarré la somme des cubes plus que le quart du quarre-quarré la somme des quarre-quarrez plus qu'un cinquiéme du quarrecube, &c. Or pour demonstrer cela generalement, il faut étant donné un nombre, in progressione naturali, trouver la somme, non seulement de tous les quarrez & cubes, ce que les Autheurs qui ont écrit ont déja fait, mais encore la somme des quarre-quarrez quarre-cubes, &c. ce que personne que je sçache n'a encore trouvé, & pourtant cette connoissance est belle & de grand usage, & n'est pas des plus aisées, j'en suis venu à bout avec beaucoup de peine.

En voicy un exemple. Si quadruplum maximi numeri binario auctum ducas in quadratum trianguli numerorum, & à producto demas summam quadratorum à singulis fiet summa quadrato-quadratorum quintupla. Il semble que Bachet, dans son traitté de numeris multangulis, n'a pas voulu tâter ces questions apres avoir fait celle des quarrez & des cubes: je feray bien-aise que vous vous exerciez pour trouver la methode generale, pour voir si nous rencontrerons. En tout cas je vous offre tout ce que j'y ay fait, qui comprend entierement tout ce qui se peut dire sur cette matiere. Voicy cependant une tres-belle proposition, qui peut-étre vous y servira, au moins c'est par son moyen que j'en suis venu à bout. C'est une regle que j'ay trouvée pour donner la somme non seulement des triangles, ce qui a été fait par Bachet & les autres, mais encore des pyramides, triangulo-triangulorum, &c. à l'infini, voicy la proposition.

Ultimum latus in latus proximè majus facit duplum trianguli.

Ultimum latus in triangulum lateris proximè majoris facit triplum pyramidis.

Ultimum latus in pyramidem lateris proximè majoris facit quadruplum triangulo-trianguli.

Et eo in infinitum progressu.

Toutes ces propositions, quoy que belles de soy, m'ont servi à trouver les quadratures, que je suis bien-aise que vous estimiez.

Je voudrois avoir assez de loisir pour vous envoyer les propositions des nombres que vous trouvés si difficiles, elles le sont en effet, méme Tartaglia avoit creu qu'elles n'estoient point trouvables par art. J'en ay envoyé la construction au Pere Mersenne. Il vous la communiquera si vous la luy demandez, je vous envoyeray aussi une autre-fois le centre de gravité de toutes ces nouvelles figures, avec la methode generale pour le trouver; vous sçavez cependant que celuy du demy-conoide divise l'axe en proportion de 11. à 5. non pas de 11. à quatre, comme vous aviez creu, &

que celuy des nouvelles paraboles divise l'axe en proportion pareille à celle du parallelogramme, qui a pour hauteur l'axe, & pour baze celle de la figure à la figure, ou pour mieux dire le diametre de toute parabole est divisé en tel point de son diametre par le centre de gravité en sorte que le segment d'en bas est à celuy d'enhaut, comme la figure au parallelogramme de méme baze & de méme hauteur,

Puis que vous avez trouvé la demonstration de toutes mes propositions, vous m'obligerez beaucoup de prier le Pere Mersenne de vous donner mes nouvelles Helices, desquelles les demonstrations vous seront aussi aisées que celles du conoïde & des paraboles, il m'écrit qu'on doûte de delà de leur verité, Vous la luy confirmerez, s'il vous plaît, & desabuserez Monsieur de..... qui semble ne les avoir pas creües, mais il n'en faut pas demeurer là, car pour suppleér tout ce qui semble manquer dans l'Archimede. Exponatur parabole, A C D F cujus axis D E, basis A F, C B parallela D E & ideo perpendicularis ipsi AF. Circa rectam DE fixam figura ADE, conversa constituit conoïdem Archimedeum; circa AE fixam constituit nostrum conoïdem, sed si figura ACB, circa A B, fixam convertatur constituitur portio nostri conoidis, si autem circa CB fixam fiat conversio quæritur proportio novi istius conoidis ad conum ejusdem basis & altitudinis, hoc autem etiam perfecimus. Imò mirabilius quiddam invenimus, Ellipsioidem cui si conum æqualem inveneris dabimus circuli quadrationem. Sed hæc aliàs. Vôtre question des cones est si aisée qu'il seroit inutile de vous en écrire la solution.

Pour les tangentes de la Conchoide j'ay peur que vous aurez equivoqué; car voicy ma proposition qui n'exclud aucun point, laquelle j'ay coppié sans la verifier sur mon manuscrit, peut-étre que c'est moy qui auray failli, je vous l'écriray la premiere fois.

Esto Conchoïs A B C, cujus polus F, intervallum H A & in ea datum punctum B, primùm asserimus eam in interiora convexam repræsentandam, licèt contrarium Pappo & Eutocio visum fuerit, deinde tangentem ita ducimus. Jungatur FIB & perpendicularis B D, demittatur rectangulum B F I unà cum quadrato BD ad rectam B D, applicentur & faciant latitudinem D N, fiat ut H D ad D N, ita B D ad D I, juncta Y B tanget Conchoidem. J'attends vôtre réponse, & suis, &c.

A Monsieur de Roberval.

Du 7. Decembre 1636.

MONSIEUR,

Apres vous avoir asseuré, que je n'ay jamais songé de soûtenir une opinion contre mon sentiment, & que je serois ravi que vôtre proposition mechanique feut vraye, afin que nous ne fussions plus en peine de sonder la nature par cét endroit: je m'en remettray du surplus à la lettre que j'écris à Monsieur de Carcavi, à laquelle j'adjoûteray seulement, que le dernier des principes dont vous vous servez pour l'établissement de vôtre proposition ne me semble du tout point admissible, & que sans aucun esprit de contradiction j'estime que pour établir la proportion des poids qui se meuvent librement on ne doit pas avoir recours aux forces mouvantes, & qu'au contraire les poids libres doivent servir de regle à tous les autres mouvemens violens, & c'est en quoy je trouve que vôtre principe est défectueux, outre qu'il est apparemment faux, puisque celuy dont je me sers en sa place ne peut, ce me semble, étre contredit, & de cela j'en fais juge qui que ce soit.

Sit vectis B D C, cujus medium D, centrum terræ A, sit autem recta D A vecti perpendicularis. Et sint æqualia pondera B & C ad centrum terræ per rectas B A, C A,

naturaliter annuentia, suspendatur autem vectis à puncto D, & à quavis potentia retineatur. Aio idem ponderare B & C corpora ita constituta, ac si ambo in puncto D ab eadem potentia detineantur.

Car puis que la ligne B C est sans poids, & que la puissance qui est en D, abstrahit à centro, ou au contraire les poids B & C, sive sint in punctis B & C, sive in puncto D, vergunt ad centrum motu opposito, il s'ensuit clairement que la puissance qui retiendra les poids aux points B & C, les retiendra aussi en D, & viceversâ.

Et n'importe d'alleguer qu'il semble que le mouvement qui se fait par des puissances paralleles à la ligne D A est aussi bien contraire au mouvement qui se fait sursum par la puissance qui retient en D. Car primò, il n'est pas si probable de dire qu'un mouvement violent est contraire à un autre mouvement violent, comme de dire qu'un mouvement violent est contraire au mouvement naturel. 2. Le mouvement qui se fait sur les lignes paralleles à D A, se fera sur des plans inclinez à l'horizon, & duquel la proportion sera plus inconnüe que le principe, de sorte que ou il nous faut advoüer la verité de mon principe, ou demonstrer le vôtre. Au premier cas je vous demonstreray ma proposition de mon second levier par vos propres maximes. J'estime que vous aurez grande difficulté au second.

Vous pouvez encore répondre qu'il n'est pas icy question des mouvemens qui se font sur des plans inclinez à l'Horizon, parce que vous supposez, & je l'accorde aussi qu'en tout mouvement si la force qui retient tire à l'opposite, l'equilibre se fera lors qu'elle sera égale à la force qui tire au contraire, & qu'ainsi la puissance en D tirant à l'opposite l'effet de vôtre principe s'en ensuivra : mais je réponds que vôtre réponse seroit bonne si la puissance qui est en D étoit divisée & placée aux points B & C, & qu'elle tirât au contraire par les mémes lignes, que les forces, que vous supposez en C & B, meuvent. Mais cela n'estant pas, excusez mon incredulité si elle ne se rend pas à vos raisons, lesquelles je souhaiterois plus fortes pour pouvoir librement me dedire de tout ce que j'ay fait sur ce sujet, vous protestant que jamais homme n'a esté plus docile que moy, & que lors que je reconnoistray mes fautes, je les publieray le premier avec toute franchise. J'ay esté bien-aise de voir vôtre remarque sur la Conchoïde, & vous prie de m'en donner la demonstration, & vous souvenir que lors que je vous écrivis sur ce sujet, je le fis en doûtant, & sans examiner l'écrit que je transcrivis d'un Livre où je l'avois mis il y avoit quatre ans: la construction pourtant convient au probleme & au point méme de vôtre proposition si elle est vraye, ce que j'atens que vous me confirmiez, je vous prie aussi me faire sçavoir vôtre sentiment sur les autres propositions que je vous ay envoyées, & vôtre réponse sur les autres points de ma derniere Lettre, & me croire toûjours, &c.

A Monsieur de Roberval à Paris.

Du 16. Decembre 1636.

MONSIEUR,

Je viens de recevoir vôtre Lettre du 29. Novembre, pour réponse à laquelle je vous diray que de la methode que vous avez trouvée pour donner la somme des quarrez-cubes & quarrequarrez je ne voy point qu'on en puisse tirer une regle generale pour l'invention de la somme omnium potestatum in infinitum, ce qui est requis à la solution de mon probleme, car vous dites seulement qu'il sera aisé de trouver les autres apres avoir veu celles dont vous baillés les exemples, mais je demande une methode generale qui serve, ad omnes, potestates, comme Viete a trouvé celles des sections angulaires, vous y songeres s'il vous plaît, & j'en écriray cependant l'invention & demonstration que vous

verrez lors qu'il vous plaira. Pour ce qui est des nombres, & de leurs parties aliquotes j'ay trouvé une methode generale pour soudre toutes les questions par algebre, dequoy j'ay fait dessein d'écrire un petit traité. Je croy que vous aurez maintenant veu la construction des deux que j'ay envoyé au Pere Mersenne; car il m'écrit qu'il vous les baillera, toutes ces questions sont tres difficiles, comme vous sçavez, & n'ont esté traitées par personne, j'ay esté bien aise d'étre confirmé par vôtre lettre en l'opinion que j'avois déja conceüe de Monsieur de .... il est pourtant vray qu'il doit avoir grande experience dans les nombres, car luy ayant par l'entremise du Pere Mersenne proposé une question que personne de ceux à qui je l'avois proposée n'avoit encore peu soudre, il m'a envoyé d'abord les nombres qui satisfont à la question, sans pourtant expliquer sa construction, la question est. Invenire tria triangula rectangula numero, quorum areæ constituant tria latera trianguli rectanguli numero, singulæ nempe areæ singulis lateribus sint æquales: je vous advoüeray que ce probleme me donne beaucoup plus de peine qu'à Monsieur de .... Il est vray que les nombres que j'ay trouvé sont differents des siens, & que peut-étre ay-je tenu un chemin plus difficile, comme vous sçavez que ces questions ont infinies solutions, peut-étre serez vous de mon advis si vous essayez de satisfaire à la proposition.

Vous verrez aussi mes spirales, desquelles la demonstration vous sera connüe tout aussi-tôt; car elle est pareille à celle des nouvelles figures que j'ay quarrées, ou ausquelles j'ay trouvé des cones égaux, & vous m'advoüerez que ces propositions n'illustrent pas peu la Geometrie.

Si Monsieur de Beaugrand n'a pas encore trouvé la demonstration de ces questions vous m'obligerez de luy en faire part, je luy ay écrit l'invention du centre de gravité de toutes ces nouvelles figures par une methode particuliere, qui ne suppose point la connoissance de la quadrature, ce qui vous semblera merveilleux jusques à ce que vous l'aurez veu, il est vray que je luy ay envoyé l'analyse seulement, & non pas la composition que je vous éclairciray une autre fois, parce qu'elle a ses difficultez & ne paroît pas d'abord par cette voye. J'ay trouvé le centre de gravité de la parabole sans presupposer la quadrature, comme a fait Archimede, & ainsi on en peut tirer la quadrature par un simple corollaire, toutes ces propositions, ensemble celles des lieux plans, solides, & ad superficiem, que j'ay achevées, & celles encore des parties aliquotes des nombres dépendent de la methode dont Monsieur Despagnet ne vous a peu faire voir qu'un seul cas, parce que depuis que je n'ay eu l'honneur de le voir je l'ay beaucoup étenduë & changée. Les tangentes des lignes courbes dépendent aussi de là, sur lequel sujet je vous proposeray de trouver une tangente à un point donné en la seconde Conchoïde de Nicomedes.

Au reste je suis bien aise que vous ayez trouvé la demonstration, comme vous dites; de ce que supposé qu'aux paraboles les segmens de l'axe sont entre eux comme les parallelogrammes aux mémes paraboles, il sera vray aussi qu'estans tournez sur leurs axes, les centres des solides seront où l'axe est divisé en raison comme les Cylindres aux solides; car par la voye dont j'ay envoyé un exemple à Monsieur de Beaugrand, & que je mettray au long une autre fois, j'ay trouvé la demonstration de l'antecedent & de celle du consequent que vous m'envoyerez, s'il vous plaît, j'en tireray la proportion des solides paraboliques à leurs cones, qu'il seroit mal-aisé de trouver autrement, car vous trouverez bien la proportion de ceux qui viennent post quadrata alternatim, comme quarre-quarrez, cubocubes, &c. dequoy vous baillez l'exemple au premier, mais in parabolis cubicis, quadratocubicis & sic alternis in infinitum methodus qua usi sumus non dat proportionem conoïdum ad conos, ex nostra autem methodo in omnibus omnino conoïdibus invenimus centrum gravitatis, ergò ex tua propositione dabitur proportio eorum ad conos. Je l'attends donc avec impatience, puis qu'elle doit servir à cét usage, si ce n'est que vous ayez trouvé la proportion des conoïdes cubiques quadrato-cubiques, &c. à leur cones, ce que vôtre lettre semble marquer, auquel cas je vous supplie m'envoyer lesdites proportions.

Ce n'est pas que je doûte de la verité de vôtre proposition, mais permettez-moy de vous dire que je me suis défié que vous en eussiez trouvé la demonstration & que j'ay crû seulement que vous en avez fait l'experience aux conoïdes paraboliques des quarre-quarrez, cubocubes, &c. alternis, mais la connoissance que j'ay de vôtre sçavoir fait que j'espere que vous me détromperez.

Pour ce qui est de la proportion du solide qui se fait sur un diametre de la parabole parallele à l'axe ma construction est differente de la vôtre. Il seroit inutile de l'adjoûter, puis qu'elles concluent toutes deux.

Je me trouve obligé d'adjoûter un mot touchant vôtre proposition mechanique parce que le Pere Mersenne m'écrit qu'enfin j'ay acquiessé à vôtre opinion, ce que pourtant je ne sçaurois faire par les raisons que vous allez voir, & vous puis assûrer que jamais je ne fus mieux confirmé en la proposition de mon second levier que je le suis maintenant, car pour celle du premier il la faut établir par de nouveaux principes, puisque vous avez nié ceux que j'estimois si clairs.

Si vôtre principe duquel je vous ay déja écrit par ma derniere lettre est vray, il s'ensuit manifestement qu'un méme corps approchant du centre de la terre changera son poids. In secunda figura sit vectis C A B, cujus medium A, cum centro terræ N, per rectam A N ad vectem perpendicularem jungatur, in punctis C & B, pondera C & B, æqualia constituantur, & similia quæ ad centrum per rectas C N, B N annuant. Si rectæ N C, N B, essent ad vectem perpendiculares potentia in A æqualis duobus ponderibus B & C ex tuo principio detineret vectem. Sed cum angulos N C A, N B A acutos efficiant, aut eadem, aut minor, aut major potentia requiretur in A ad æquilibrium. Si eadem potentia facit æquilibrium, verum erit principium quo in precedenti ad te epistola usi sumus (quod si fatearis, statim vectem nostrum demonstrabimus.) Si major, aut minor potentia æquilibrium constituit, ergo in 1. casu quò minuentur magis anguli rectarum C N, B N cum vecte, eò major requiretur ad æquilibrium potentia; in 2. casu minor. Supra punctum A idem vectis in eadem directionis linea similiter ponatur, ut in figura minuentur anguli linearum C N, B N, ut patet: variabit igitur potentia æquilibrij in A constituta, ideoque pondus ex gravibus B & C compositum pro diversa à terræ centro distantia erit etiam diversum.

Primam partem dilemmatis quo minus fatearis Impedit tua propositio, quippe hoc dato, corrueret, fatearis igitur necesse est, aut potentiam in A variare pro diversitate angulorum, aut eamdem semper esse in omni angulorum acutorum positione, sed tamen inæqualem potentiæ quæ detinet potentias ad vectem perpendiculares.

Utrumlibet concesseris, manifestissima demonstratione detegitur paralogismus, quem tuæ demonstrationi irrepsisse nec veritas quam quærimus patitur dissimulare, nec tu ipse poteris fortasse diffiteri.

In prima figura quæ est quarta tuæ propositionis, his verbis ita construis. Soit le centre de la balance A, le bras A B plus grand que le bras A C, & soient premierement les lignes de directiou B D, C E, perpendiculaires aux bras A B, A C, par lesquelles lignes tirent les puissances, D, E, (lesquelles seront des poids si ou veut) & qu'il y ait méme raison de la puissance D à la puissance E, que du bras AC, au bras AB, les puissances tirans l'une contre l'autre, je dis qu'elles feront equilibre sur la balance C A B. Car soit prolongé le bras C A jusques en F en sorte que A F soit égale à A B, & soit considerée C A F comme une balance droite, de laquelle le centre soit A, soient aussi imaginées deux puissances G, H, desquelles & de toutes leurs parties les lignes de direction soient paralelles à la ligne CE, & que la puissance G soit égale à la puissance D, & la puissance H égale à la puissance E, l'une sçavoir G tirant sur le bras A F, & l'autre sçavoir H tirant sur le bras A C, lors par la premiere proposition, les puissances G H feront equilibre sur la balance C A F. Mais par le premier principe la puissance D sur le bras A B, fait le méme effet que la puissance G sur le bras A F, partant la puissance D sur le bras A B fait equilibre

avec la puissance H sur le bras A C, & la puissance H tirant de méme que la puissance E sur le bras A C, par le méme premier principe, la puissauce D sur le bras A B, sera equilibre avec la puissauce E sur le bras A C. Hîc vertitur cardo tuæ demonstrationis.

Et 1. si dixeris in omni angulorum acutorum positione eamdem semper potentiam requiri ad æquilibrium, statim demonstrabo meam de vecte propositionem: fatearis igitur necesse est variare potentiam prout anguli variant. His positis, esto si placet in exposita figura centrum terræ N in quod rectæ C E, B D dirigantur, & sint in punctis E & D pondera seu gravia in proportione data, quod quidem liberum esse tua innuit constructio (imò hîc tantùm abs te tenditur ut per potentias imaginarias ab omnibus omnino partibus παραλλήλως moventes inveniatur proportio ponderum in vecte quiescente, aliter quippe, cum hujusmodi potentiæ nullibi in rerum natura reperiantur; inutiles prorsus essent) in punctis H & G construis potentias ponderibus E & D, æquales, quæ ab omnibus ipsarum partibus παραλλήλως moveant, potentiam deinde H, potentiæ E æqualiter movere concludis per 1. tuorum axiomatum, quia nempe trahet H potentia per punctum C, & rectam H A, perpendicularem vecti, trahet etiam pondus E, per eamdem rectam vecti perpendicularem, cum igitur æquales potentiæ per eamdem rectam & eumdem angulum moveant, & circa eamdem a vectis centro distantiam, pondus E & imaginaria H, potentia æqualiter trahunt. Id verisimile cum sit, veritatem intimam quærentibus non potest non videri falsissimum. Pondus in E sit Sphæricum, verbi gratia, omnes omnino ipsius partes ad centrum N tendunt per rectas in eadem N, centro concurrentes & vectem I C, si continuentur ad angulos acutos stantes, ergo potentiæ abs C, utrinque æqualiter remotæ intelligentur, vectem ad angulos acutos suis motibus secantes; contra cum partes omnes potentiæ H παραλλήλως moveant, intelligentur potentiæ abs C utrinque æqualiter remotæ ad angulos rectos vectem suis motibus secantes. Cum igitur partes omnes potentiæ H simul sumptæ æquentur partibus omnibus potentiæ seu ponderis E simul sumptis, tota enim potentia H toti ponderi E æquatur, patet ex jam traditis potentiarum H, E, in punctis H & E inæqualem esse motum; quod igitur de potentia H concludit demonstratio, perperam ad pondus E porrigit

S'il me restoit du temps ou du papier j'adjoûterois suivant vôtre desir la demonstration des cones Isoperimetres, ce sera une autre fois, me reservant encore de vous écrire quelque chose de plus recherché sur les Mechaniques, à la charge que vous m'obligerez de croire que je n'aurois garde de m'opiniâtrer aprés une proposition, si je ne la croyois veritable, & que je la quitteray un moment aprés que de nouvelles raisons l'emporteront sur les miennes. Je suis, &c.

A Monsieur de Roberval.

MONSIEUR,

Je trouve assés de loisir pour vous envoyer encore la construction du lieu plan, si à quotcumque, &c. que je tiens une des plus belles propositions de la Geometrie, & je crois que vous serés de mon advis.

Sint data quotlibet puncta, 5. verbi gratia . A, G, F, H, E, (nam propositio est generalis) quæritur circulus ad cujus circumferentiam in quolibet puncto inflectendo rectas à datis punctis, quadrata omnium sint æqualia spatio dato. Jungantur puncta quævis A & E. per rectam A E, in quam ab aliis punctis datis cadant perpendiculares G. B, H, D, F, C, omnium rectarum, punctis datis vel occursu perpendicularium & puncto

A terminatarum sumatur pars conditionaria, quintans, verbi gratia, in hac specie; quintans ergo rectarum A B, A C, A D, A E, simul sumptarum esto A O, & à puncto O excitetur perpendicularis infinita O N, à quâ resecetur O I pars conditionaria (quintans nempe pro numero punctorum datorum) perpendicularium G B, F C, H D, & intelligantur jungi rectæ A I, G I, F I, H I, E I, quadrata istarum 5. erunt minora spatio dato: demantur igitur à spatio dato & supersit, verbi gratia, Z planum cujus quintans, pars nempe conditionaria sumatur, & in quadratum redigatur, circulus centro I, intervallo M descriptus satisfaciet proposito, hoc est quodcumque punctum sumpseris in ipsius circumferentia rectarum à datis punctis ad illud punctum ductarum quadrata erunt æqualia spatio dato.

Adderem demonstrationem, sed longa sanè est, & malim vestrum amborum sollicitare genium ad eam inveniendam: non solùm autem has propositiones, sed omnes omnino de locis planis absolvi, imò locos quamplurimos adinveni de quibus nihil scripserat Apollonius, qui tamen sunt pulcherrimi, verbi gratiâ.

Datis tribus punctis in rectâ A B C, invenire circuli circumferentiam in quâ sumendo quodlibet punctum ut N, quadrata A N, N B, superent quadratum N C spatio dato.

De locis solidis & ad superficiem multa quoque jam sunt detecta. Casus loci plani superioris non addo, nam patebunt statim. Si puncta data sint tantùm tria, & constituant triangulum, centrum circuli localis erit centrum gravitatis illius trianguli. & hæc proportio singularis, satis est mira.

Sed hic non moror. Propositionem universalissimam ita constituo, & jam construxi. Si à datis quotlibet punctis inflectantur rectæ, & exponantur omnium species in datâ proportione crescentes, aut deficientes erunt species ita auctæ aut deminutæ dato spatio æquales. Exemplum. Sint data tria puncta in superiori figurâ A, N, C, & quærendus circulus in cujus circumferentiâ sumendo quodlibet punctum ut N quadrati N A dimidium, verbi gratiâ, quadrati B N duplum & quadrati C N triplum simul juncta conficiunt spatium datum & demonstratio ad quamlibet proportionem & quotlibet puncta porrigenda. Hanc propositionem, pulcherrimam sanè, videtur non vidisse Apollonius.

Lettre de Monsieur de Roberval à Monsieur de Fermat.

Du 4. Avril 1637.

MONSIEUR,

Quoy que j'eusse receu des Lundy dernier vôtre demonstration du lieu plan, neantmoins mes occupations tant publiques que particulieres ne me permirent point de la considerer jusques à Jeudy que je la presentay de vôtre part à l'Assemblée de nos Mathematiciens qui étoit ce jour là chez Monsieur de Montholon Conseiller, où elle feut receüe, considerée, admirée avec étonnement des esprits, & vôtre nom élevé jusques au Ciel, avec charge particuliere à moy de vous remercier au nom de la Compagnie, & vous prier de m'envoyer tout d'une main la composition du lieu solide avec une briefve demonstration, afin de faire imprimer les deux ou soûs vôtre nom, ou sans nom comme vous le voudrez: en quoy nous aurons le soin d'étendre plus au long ce qui semblera trop concis pour le public; cependant il y eût debat à qui auroit vôtre écrit pour en tirer copie, chacun m'enviant le bon-heur de la communication que j'ay avec vous: mais Monsieur le President Paschal à qui le premier je l'avois mis entre les mains,

mains, & qui l'avoit leu à la Compagnie, donna arrest en sa faveur, se fondant sur la maxime (qui tenet, teneat) & pour faire droit aux parties interessées, se chargea luy méme de leur en fournir copie, ordonnant que puis aprés l'original me seroit remis entre les mains. Je leur avois dés auparavant communiqué la construction, & un nommé Monsieur le Pailleur avoit trouvé la demonstration particuliere pour trois & pour quatre points, si differente de la vôtre, que c'est une chose étrange; il y avoit apparence qu'avec le temps il eût trouvé une demonstration generale. Mais il confesse que cette recherche le tuoit, & qu'il vous a une particuliere obligation, de l'avoir delivré d'une peine presque insupportable: pour moy je ne me puis promettre aucun loisir que trois mois ne soient passez, pour étre delivré de mes leçons publiques, & quand j'aurois ce loisir je ne serois pas assûré de trouver le lieu solide, lequel je prevoy tres-difficile, c'est pourquoy dés maintenant je vous feray si vous voulés une ample declaration de mon impuissance, afin que sans me tenter plus long-temps, & qu'ayant égard aux prieres d'une telle Compagnie que celle dont je vous parle, vous nous fassiez part de vôtre invention, qui est telle que le grand Geometre des siecles passez se glorifioit particulierement d'y avoir adjoûté la perfection, en ayant receu l'invention de ceux qui l'avoint precedé; jugés combien vous avés occasion de vous glorifier de l'avoir trouvée en un temps auquel elle étoit en méme état que si elle n'avoit jamais été connue. Il m'est enfin paru quelque lumiere pour le centre de gravité des paraboles en considerant les centres des parallelogrammes circonscrits, comme s'ils étoint tous posés sur une méme baze differens seulement en hauteur, mais comme ces lumieres me vienent au matin en me levant, & qu'il faut du loisir pour les éclaircir je ne me puis pas promettre d'en venir à bout si tôt, si vous me délivrés de cette peine, je vous en auray l'obligation entiere. Je suis, &c.

Lettre de M. de Fermat à Monsieur de Roberval à Paris.

Du 20. Avril 1637.

MONSIEUR,

Je ne peus pas vous écrire par le dernier Courrier, à cause des occupations ausquelles je me trouvay engagé, je prens maintenant la plume pour vous témoigner que je suis beaucoup obligé à ces Messieurs, à qui vous avés fait voir ma proposition, ausquels vous asseurerés, s'il vous plaît, que j'estime beaucoup plus leur approbation que mon Ouvrage. Leur sçavoir est si connu, que je ne puis m'empécher d'étre glorieux d'avoir écrit & inventé quelque chose qui leur plaise. Je ne pretends pas par là vous exclurre du nombre, au contraire les marques de vôtre sçavoir m'étant plus particulierement connuës, je juge par là quels doivent étre ceux qui conferent avec vous.

Au reste je vous eusse envoyé les lieux solides, ad 3. & 4. lineas, n'étoit que j'ay creu que Monsieur de Beaugrand ne fera pas difficulté de bailler à Monsieur de Carcavi le lieu ad 3. lineas, que je luy envoyay il y a long-temps avec la demonstration, dés que vous aurez celuy-là je vous envoyeray l'autre. Si j'avois retenu copie de celuy ad 3. lineas je n'eusse pas fait difficulté de vous l'envoyer. Mais ne l'ayant plus, j'ay voulu ménager la peine qu'il m'eût falu prendre à le refaire, à laquelle je me porteray pourtant, si Monsieur de Beaugrand ne le baille pas. Vous verrez entre les mains de Monsieur Carcavi les deux livres, de locis planis, que j'avois promis depuis long-temps à Monsieur Beaugrand, & que j'ay à dessein envoyé un Courrier plûtôt que je ne luy avois fait esperer, afin que vous puissiez cependant les voir. Vous m'obligerez de m'en écrire avec

franchise vôtre sentiment. Je ne doûte pas que la chose n'eût peu se polir davantage, mais je suis le plus paresseux de tous les hommes; je feray bien aise que vous m'écriviez aussi quelles de ces propositions vous étoient connües, & quelles non, & en cas que vous en ayez veu quelqu'une, principalement du 2. Livre, si elles étoient pareilles à celles que vous verrez. Car il y a huit ans que le deuxiéme Livre est écrit & en ce temps j'en baillay deux copies, l'une à Monsieur Despagnet Conseiller au Parlement de Bourdeaux, & l'autre à Monsieur de ...., si bien que peut-étre quelqu'une de ces propositions aura esté divulguée, peut-étre vous méme, ou quelqu'autre de ceux de vôtre Compagnie en ont fait une partie. Eclaircissez moy de tout au vray, & vous m'obligerez beaucoup, & surtout que vôtre jugement suive toutes ces propositions, s'il vous plait, je l'attends pour réponse à celle-cy; au reste quoy qu'on juge digne d'impression de moy, je ne veux pas que mon nom y paroisse, je me reserve à vous entretenir plus amplement une autrefois; cependant vous sçaurez qu'outre les lieux plans & solides qui sont dans Pappus, j'en ay trouvé grande quantité de tres-beaux & dignes de remarque, que je n'ay pourtant ozé méler avec ceux d'Apollonius. J'en ay plus de cent propositions tres-belles, & particulierement des lieux solides, & ad superficiem, mais le loisir me manque; je n'ay pas voulu faire le Grammairien en expliquant au menu le texte de Pappus, il suffit que j'aye pris son sens, comme je croy que vous m'advoüerez. J'attends vôtre réponse, & suis, &c.

Lettre de Monsieur de Roberval à Monsieur de Fermat.

Du 1. Iuin 1638.

MONSIEUR,

Puis qu'il est vray qu'il n'y a aucun contentement que je prefere à celuy que je reçoy de vos Lettres, vous devés penser que les occupations qui m'ont empéché de vous écrire depuis si long-temps, doivent avoir esté bien pressantes, ayans eu la force d'interrompre nôtre entretien qui m'est si cher & si agreable. Or pour recommencer, je vous diray que si j'ay entrepris la defense de vôtre traitté (de Minimis & Maximis) contre les objections de M. Descartes, je m'y suis senty obligé, ou plûtôt necessité par mon genie, qui ne peut souffrir que la verité soit tant soit peu obscurcie, tant s'en faut qu'il endure qu'on la fasse passer pour ce qu'elle a de plus contraire, j'entens pour une fausseté accompagnée de paralogismes. C'est pourquoy j'ay grand besoin qu'au lieu de me remercier comme vous faites, vous m'excusiez, tant pour ce qu'étant foible j'ay osé entrer en lice contre un fort adversaire pour vous, que pource que je l'ay fait sans vous en advertir, veu que vous sembliez y avoir le principal interest. Mais en effet c'est l'interest de la verité, & de tous ceux qui la cherissent; c'est pourquoy j'en ay fait le mien propre, & elle ma paru si claire qu'elle m'a fait passer pardessus les considerations de ma foiblesse, à laquelle j'ay pensé que son evidence pourroit suppleér assez suffisamment. J'espere que vous recevrez cette excuse & que vous me ferés l'honneur de croire que la connoissance que j'ay de vôtre merite, m'a tellement acquis à vous, qu'elle m'a fait témoigner ce zele, quoy que mon insuffisance seule l'ait peu rendre en quelque sorte indiscret. Monsieur Descartes n'ayant pas encor receu mon écrit le 3. May, ce qui est pourtant bien tard, a fait quelques objections nouvelles de peu de consequence, vous les verrez dans sa Lettre que le Pere Mersenne vous pourra envoyer, il veut trouver la tangente d'un cercle, persistant toûjours que c'est la plus grande, sinon qu'il y adjoûte qu'elle n'est la plus grande que sous certaines conditions; en quoy il s'enserre luy mé-

me, voulant refuter vôtre écrit qui parle de la plus grande absolument, par l'exemple d'une qui n'est la plus grande que conditionnairement. Il est vray que voulant la trouver absolument ou la moindre, & pour ce faire nommant le diametre N D, C, D E, B, & D C, ou E C, A, on tombe dans une absurdité que $C + B^2$ est égal à rien, & si le point E étoit dans le cercle $C - B^2$ feroit égal à rien. Mais cette absurdité monstre qu'il ne faut pas chercher le point B dans la circonference autre part que dans la ligne D N, sçavoir au point N pour la plus grande, & au point D pour la moindre. En quoy il est remarquable que $C + B^2$ est la somme de la plus-grande & de la moindre & $C - B^2$ est leur difference. Mandez moy quel est vôtre sentiment, car n'ayant pas encor le loisir de considerer bien particulierement le fonds de vôtre methode & sa demonstration, il ne peut étre qu'elle ne contienne des mysteres qui me sont encore cachez. J'ay trouvé admirable le moyen par lequel vous l'appliquez aux paraboles & solides paraboliques pour en trouver les centres, mais le voulant éprouver en la vraye parabole, j'ay trouvé qu'il falloit changer vôtre raisonnement qui n'est que particulier au Conoide parabolique, car ayant l'espece de la ligne E O, vous pouvez bien dire comme la difference des quarrez I A, & A N est au quarré de A N, ainsi la ligne E O est à O M, ce que vous ne prouvez pas en la parabole méme, en laquelle suivant ce raisonnement il faudroit dire, comme la difference des cubes de I A & A N est au cube de A N, ainsi la difference des quarrez de E M, & M O est au quarré de M O, & cependant vous n'avez pas l'espece ny de l'un ny de l'autre de ces quarrez; au lieu desquels j'ay dit ainsi, il y a plus grande raison du cube I A au cube A N que du quarré E I au quarré O I, ce qui reüssit, & en la parabole cubique j'ay dit, il y a plus grande raison du quarré-quarré I A au qq. A N, que du cube E I au cube O I, &c. Mais le raisonnement est autant ou plus beau & plus facile par les figures qui restent ayant osté le plan parabolique du parallelogramme qui le comprend. J'ay promis à Mr. Mydorge de l'entretenir sur cette invention que je ne sçaurois assez admirer; & je m'asseure que Mr. Paschal en fera ses exclamations ordinaires, si je puis la luy faire voir, comme j'espere & a Mr. des-Arguess il faut aussi que Mr. Descartes la voye, afin qu'il nous en fasse voir les paralogismes, & puis que vous avez trouvé par la méme voye les tangentes de sa figure qui est une espece d'ovale, il sera bon que vous luy envoyez, ou nous, si vous le trouvez meilleur. Mais prenez garde que par le méme point donné il peut y passer deux de ces ovales, & partant y avoir deux tangentes, ce que j'espere que l'equation fera découvrir. J'y travaillerois, mais je suis asseuré que vous y reüssirez mieux que moy : joint qu'il me faudroit étre délivré de la roüe à laquelle je suis attaché, ayant appellé du nom de roüe le cercle qui roule, avec les conditions que vous sçavez, & ayant donné un nom à la ligne courbe que décrit un point de la circonference pendant une revolution entiere, je demonstre que l'espace compris de cette ligne courbe, & de la droite qui luy sert de base sur laquelle la roüe se meut, est (majus datâ quàm in ratione) c'est à sçavoir que de cét espace en ayant osté l'espace de la roüe, il y aura méme raison du reste à la méme roüe, que de la base de l'espace à la moitié de la circonference de la roüe. D'où il s'ensuit qu'en la roüe ordinaire de laquelle la base est estimée égale à la circonference, l'espace dont il s'agit est triple de la roüe, & si la base est double de la circonference l'espace sera quintuple de la roüe; Si triple, septuple : & ainsi en continüant par les nombres impairs. De tout cecy, je vous envoyeray par le premier Courrier une brieve demonstration, en attendant le traitté entier. Je suis, &c.

*Lettre de Monsieur de Fermat à Monsieur de*****

MONSIEUR

Puis que Monsieur de . . . . . parle, & que vous l'ordonnés, vous, Monsieur, de qui la reputation est si grande & si bien établie, je laisse éveiller ma Geometrie, qui dormoit depuis long-temps dans un profond repos, & pour entrer d'abord en matiere, je veux bien vous conter l'intrigue de nôtre Dioptrique * & de nos refractions en forme d'Histoire, afin de vous laisser le jugement libre, & que vous puissiez prononcer sans preoccupation. Dés que j'eus veu le Livre de feu Monsieur Descartes, & que j'eus examiné avec quelque attention la proposition qui sert de fondement à sa Dioptrique, & qui établit la proportion des refractions, je soupçonnay sa preuve, sa demonstration me sembla un veritable paralogisme. 1. Parce qu'il la fonde sur une comparaison, & que vous sçavez que la Geometrie ne se picque guere de ces figures, les comparaisons y étant encore plus odieuses que dans le commerce du monde. Secondement parce qu'il suppose que le mouvement de la lumiere qui se fait dans l'air & dans les corps rares est plus malaisé, ou si vous l'aimez mieux ainsi plus lent que celuy qui se fait dans l'eau, & les autres corps denses, ce qui semble choquer le sens commun, & enfin parce qu'il pretend que l'une des directions ou des determinations du mouvement d'une balle subsiste toute entiere aprés la rencontre du second milieu, j'adjoûtois même quelques autres raisons, qu'il seroit ou superflu, ou ennuyeux de vous déduire; il vît mes écrits, il y répondit, & aprés plusieurs réponses & repliques de part & d'autre nous nous separames, comme le prevenu & le témoin, l'un dans l'affirmative, l'autre dans la negative, quoy que j'eus enfin des Lettres de sa part pleines de civilité. Depuis sa mort Mr. de la Chambre ayant publié son traité de la lumiere, & m'ayant fait l'honneur de me l'envoyer, je pris occasion de luy écrire la Lettre que vous avés veüe, dans laquelle je luy témoignay que pour nous guarentir des paralogismes en une matiere si obscure, je ne voyois point de moyen plus assûré que de chercher les refractions dans cét unique principe que la nature agit toûjours par les voyes les plus courtes, sur le fondement duquel je luy indiquay qu'on pouvoit chercher par Geometrie le point de refraction en le reduisant au probleme ou theoreme que vous sçavez; mais parce que j'en jugeay l'invention tres-difficile & tres-embarrassée, puis que ces questions de maximis & minimis, conduisent d'ordinaire à des operations de longue haleine, & qui se brouillent aisement par une infinité d'asymmetries qu'on trouve sur son chemin, je laissay là ma pensée pendant plusieurs années en attendant que quelque Geometre moins paresseux que moy en fit ou la découverte ou la demonstration. Personne ne voulut entreprendre ce travail; cependant je recevois de Lettres de Monsieur de la Chambre de temps en temps, par lesquelles il me pressoit d'adjoûter la Géometrie à mon principe, & de faire la demonstration en forme du veritable fondement des refractions. Ce qui me rebutoit à l'advance étoit l'asseurance que Mr. Petit & autres m'avoint donnée, que leurs experiences qu'ils avoint souvent reiterées pour mesurer les refractions, & dans l'eau, & dans le cristal, & dans le verre, & dans beaucoup d'autres liqueurs differentes, s'accordoint tres-precisement avec la proportion de Monsieur Descartes, de sorte qu'il me sembloit inutile d'en aller

* Ceux qui ont le troisiéme Tome des Lettres de M. Descartes y pourront voir plus au long les objections de M. de Fermat contre la Dioptrique de M. Descartes, & divers écrits sur ce sujet depuis la page 167. jusques à la page 350

chercher quelqu autre par mon principe, puiſque la nature elle méme s'expliquoit ſi clairement en ſa faveur. L'objection que vous me faites dans vôtre écrit ne me faiſoit nulle peine, & j'y avois déja répondu dans ma Lettre à Mr. de la Chambre par cette raiſon que tout ce qui appuye ou fait ferme ſur quelque point d'une ligne courbe eſt cenſé faire ferme ou appuyer ſur la ligne droite qui touche la courbe audit point, & ainſi quoy que la ſomme des deux lignes de reflection ſoit quelquefois la plus grande dans les miroirs concaves, ſphæriques ou autres, elle eſt toûjours la plus petite de toutes celles qui peuvent tomber ſur la ligne ou ſur le plan qui touchent les miroirs au point de la reflection, & cela n'a pas beſoin de plus grande preuve, Mr. Deſcartes le ſuppoſant ainſi auſſi bien que moy : toute la difficulté ſe reduiſoit donc à ce qu'il me paroiſſoit que j'avois à combattre, non ſeulement les hommes, mais encore la nature. Neantmoins les dernieres inſtances de M. de la Chambre furent ſi preſſantes que je reſolus il y peut avoir environ deux ou trois ans de tenter le ſecours de mon analyſe, m'imaginant qu'il y a une infinité de proportions differentes entre-elles, dont les ſens ne ſçauroient verifier la diverſité, & qu'ainſi j'en trouverois peut-étre quelqu'une qui approcheroit de celle de Monſieur Deſcartes, & qui pourtant ne ſeroit pas la méme. Je fis mon analyſe en forme par une methode qui m'eſt particuliere, & qu'Herigone à fait autrefois imprimer dans ſon cours Mathematique, je ſurmontay toutes les aſymmetries avec peine, & voila que tout à coup à la fin de mon operation tout ſe débroüille, & il me vient une equation tres-ſimple qui me donne juſtement la méme proportion de Monſieur Deſcartes : je creus ſur l'heure avoir equivoqué, car je ne pouvois me figurer qu'on aboutit à une méme concluſion par des routes tout à fait oppoſées, Mr. Deſcartes ſuppoſant pour un des moyens de ſa demonſtration que le mouvement de la lumiere trouve plus de reſiſtence dans l'air que dans l'eau, & moy ſuppoſant tout le contraire, comme vous verrez dans la copie de ma demonſtration que j'ay tâché de refaire de memoire pour vous ſatisfaire pleinement, mon original ayant eſté envoyé à Monſieur de la Chambre ſuivant ma pareſſe ordinaire. Je refis donc pour lors la queſtion à diverſes repriſes en changeant les poſitions, & je trouvay toûjours la méme concluſion, ce qui me confirma deux choſes, l'une que l'opinion de Mr. Deſcartes ſur la proportion des refractions eſt tres-veritable, & l'autre que ſa demonſtration eſt tres-fautive, & pleine de paralogiſmes. Meſſieurs les Carteſiens virent enſuite ma demonſtration qui leur fut communiquée par Monſieur de la Chambre, ils s'opiniâtrerent d'abord à la rejetter, & quoy que je leur repreſentaſſe tout doucement qu'il leur devoit ſuffire que le champ de bataille demeurât à Mr. Deſcartes, puiſque ſon opinion ſe trouvoit veritable & confirmée, quoy que par de raiſons differentes des ſiennes, que les plus fameux Conquerans ne s'eſtimoient guere moins heureux lors que la victoire leur étoit procurée par les troupes auxiliaires, que ſi c'étoit par les leurs, ils ne voulurent point dans les premiers mouvemens entendre raillerie, ils vouloint que ma demonſtration fût fautive, puis qu'elle ne pouvoit pas ſubſiſter ſans deſtruire celle de Mr. Deſcartes qu'ils entendoient mettre toûjours hors du pair ; mais comme les plus habiles Geometres qui virent la mienne ſembloint y donner leur approbation, ils me firent enfin compliment par une Lettre de Mr. Clairſelier, qui eſt celuy qui a procuré l'impreſſion des Lettres de Monſieur Deſcartes, ils crierent au miracle dequoy une méme verité s'étoit rencontrée au bout de deux chemins entierement oppoſez, & prononcerent qu'ils vouloient bien laiſſer la choſe indeciſe, & advoüer qu'ils ne ſçavoint à qui donner la preferance de Mr. Deſcartes ou de moy ſur ce ſujet, & que la poſterité en jugeroit. C'eſt à vous, Monſieur, qui eſtés ſans doûte deſtiné par vôtre merite extraordinaire à avoir grand commerce avec elle à l'informer, ſi vous le jugez à propos, de ce celebre demélé, ou ſi vous aymés mieux placer ce petit écrit parmi vos papiers inutiles, j'y conſens, & tout m'eſt indifferent ; mais il n'en eſt pas de méme de la tres-humble priere que je vous fais de me croire, &c.

Demonstration dont il est parlé dans la Lettre precedente.

SOit la droite A F M, qui represente la separation de deux differens milieus, que l'air soit du costé de B, & l'eau du costé de H, le rayon de lumiere qui doit aller du point B qui est en l'air, vers le point F, ou commence le milieu de l'eau, se romp & va vers H, s'approchant de la perpendiculaire suivant les experiences connuës & vulgaires. Monsieur Descartes determine ce point H, en telle sorte qu'en tirant une perpendiculaire du point B sur la ligne A F M, qui soit B A, il fait que la ligne A F est à la ligne F M, comme la resistance d'un des milieus à celle de l'autre, bien qu'il entende contre mon sens, que la resistence est plus grande dans l'air qu'elle ne l'est dans l'eau. Soit donc la plus grande resistance representée par la ligne A F & la moindre par celle de F M & par consequent la ligne A F plus grande que F M, soit élevée du point M la perpendiculaire M H qui soit coupée en H par le cercle dont le centre est F, & le rayon F B, si bien que les droites B F, & F H seront égales, je dis que le rayon B I venant à se rompre par la rencontre de l'eau ira vers H, car puisque par mon principe la nature agit toûjours par les voyes les plus courtes, si je prouve qu'en passant par les deux droites B F, & F H elle y employe moins de temps qu'en passant par aucun autre point de la droite A M, j'auray prouvé la verité de la proposition ; or puis que je presuppose que le mouvement dans l'air est plus aisé, & par consequent plus vîte, le mouvement de B en F se faira en moins de temps que celuy de F à H, & pour regler la veritable proportion, il faut faire comme A F à F M, qui sont les mesures des resistances, ainsi B F à F D, & les deux droites D F & F H seront les mesures du temps qui sera employé de B à F & de F a H, sçavoir la droite D F, sera la mesure du mouvement par B F qui est plus vîte, & la droite F H sera la mesure du mouvement par F H qui est plus lent, & ce suivant la proportion de B F à F D, ou de H F qui est égale à B F à la méme F D ; si je prouve donc que quelque point que vous preniez des deux costez D F, la somme des deux droites D F, F H est toûjours plus petite que deux droites prises au méme sens, j'auray ce que je cherchois ; soit donc premierement du costé vers M le point O en joignant les droites B O, & O H, & faisant comme B F à D F ainsi B O à C O, je dois prouver que la somme des deux droites C O & O H est plus grande que celle de D F & F H, & en prenant de méme quelqu'autre point comme V de l'autre côté vers A, je dois aussi prouver qu'en joignant les deux droites B V, & V H, & faisant comme B F à D F, ainsi B V à Y V la somme des deux droites Y V, & V H est plus grande que celle des deux droites D F & F H ; pour y parvenir je fais comme B F à A F, ainsi F O à F R, & comme la méme B F à F M ainsi F O à F I, puisque B F est plus grande que A F, donc F O est plus grande que F R, & puisque A F est plus grande que F M, F R est aussi plus grande que F I, & il paroît méme que F R est à F I comme A F à F M, car puisque par la construction comme A F est à F B ainsi F R à F O, & comme F B à F M ainsi F O à F I, donc, ex æquo, comme A F à F M, ainsi F R est à F I, je dis donc que les deux droites C O & O H sont plus grandes que les deux droites D F & F H, car par Euclide au triangle amblygone F H O la somme des deux quarrez H F & F O est égale à la somme du quarré H O & du rectangle M F O pris deux fois, or puisque nous avons fait comme B F ou F H à F M ainsi F O à F I, donc le rectangle sous les extremes H F I est égal au rectangle sous les moyennes M F O, & le rectangle H F I pris deux fois est égal au rectangle M F O pris deux fois ; nous avons donc la somme des deux quarrez H F & F O égale à la somme du quarré H O & du rectangle H F I pris deux fois, mais le rectangle H F I pris deux fois est égal au rectangle H I F pris deux fois, & au double quarré de I F & le quarré H F par le méme Euclide est égal au rectangle H I F pris deux fois, &

aux deux quarrez H I & I F, nous avons donc d'un côté le quarré H I, le quarré I F, le rectangle H I F deux fois pris, & le quarré F O égaux au quarré H O au rectangle H I F deux fois pris & au quarré F I pris deux fois, ôtez de part & d'autre le rectangle H I F deux fois & le quarré F I, reste d'un côté le quarré H I avec le quarré F O égaux audit quarré H O & I F, mais le quarré F O est plus grand que le quarré F I, puis que par la construction F O est plus grande que F I, donc le quarré H O est plus grand que le quarré H.I, & partant la droite H O est plus grande que la droite H I; si je prouve en suite que la droite C O est plus grande que les deux droites D F & F I, il restera prouvé que les deux C O & O H sont plus grandes que les trois D F, F I, & I H, ou que les deux DF & FH; je prouve donc le requis dans le triangle amblygone BFO par Euclide le quarré B O est égal à la somme des quarrez B F & F O & au double rectangle A F O, mais puisque nous avons fait par la construction comme B F à F A ainsi F O à F R, donc le rectangle soûs B F & F R est égal au rectangle A F O, & par consequent le quarré B O est égal aux quarrez B F & F O & au rectangle soûs B F, F R deux fois pris, mais le quarré FO est plus grand que celuy de FR, puisque la ligne FO a esté prouvée plus grande que la ligne F R, donc si vous substituez le quarré de F R au lieu de celuy de F O, le quarré B O sera plus grand que les deux quarrez B F, F R, & le rectangle B F R deux fois pris, mais ces dernieres sommes sont égales par Euclide au quarré des deux droites B F & F R prises comme une seule, donc la droite B O est plus grande que la somme des deux droites B F & F R : mais nous avons prouvé que R F est à I F comme A F à F M, c'est à dire comme B F à F D qui est la mesure de la diversité des mouvemens, donc comme la somme des deux antecedens B F & F R est à la somme des deux consequens D F & F I, ainsi B F à F D, or B O est à O C, comme B F à F D, donc comme B O est à O C, ainsi la somme des deux droites B F & F R est à la somme des deux droites D F & F I, mais nous avons prouvé que la droite B O est plus grande que la somme des deux droites B F & F R, il est donc vray que la droite C O est plus grande que la somme des deux droites D F & F I, ce qu'il faloit prouver en second lieu; il n'y a donc aucun point du côté de M par où le rayon puisse passer sans y employer plus de temps que par le point F. Il reste à prouver la méme chose au point V; soit fait comme cy dessus, comme B F à F A, ainsi F V à F N, & comme la méme B F à F M, ainsi F N à F X, N F sera à X F comme A F à F M, c'est à dire comme B F à F D par la preuve precedente, & chacune de ces deux droites N F & X F sera plus petite que V F, par ce qui a precedé; il faut prouver que la somme des deux droites Y V & V H est plus grande que la somme des deux droites D F & F H. Je considere premierement que par Euclide dans le triangle amblygone V F H la somme des quarrez H F & F V, & du rectangle M F V pris deux fois est égale au quarré V H, mais puis que par la construction il a esté fait comme B F à F M ainsi F V à F X, donc le rectangle B F X ou le rectangle H F X (puisque B F & F H sont égales) est égal au rectangle M F V : nous avons donc d'un costé la somme des quarrez H F & FV & du rectangle H F X pris deux fois égale au quarré H V, mais le quarré F X est moindre que le quarré F V, donc la somme des quarrez H F, F X & du rectangle H F X pris deux fois est moindre que le quarré H V. Or cette somme est égale au quarré fait des deux droites H F & F X, comme d'une seule par Euclide, donc la somme des deux droites HF & F X est moindre que H V & H V est plus grande que ces deux droites H F & F X; si je prouve donc que la droite Y V est plus grande que la droite D X il restera prouvé que la somme des deux Y V & H V est plus grande que la somme des trois D X, X F, F H, c'est à dire que des deux D F, F H, pour faire cette derniere preuve, je considere le triangle amblygone BVF auquel par Euclide les deux quarrez B F & F V sont égaux au quarré B V, & au rectangle A F V pris deux fois; or puisque par la construction nous avons fait comme B F à F A, ainsi V F à F N, donc le rectangle B F N est égal au rectangle A F V, & partant la somme des deux quarrez B F & F V est égale à la somme du quarré B V, & du rectangle B F N pris deux fois; or le rectangle B F N pris deux fois est égal

au rectangle B N F pris deux fois , & à deux fois le quarré F N, donc la ſomme des deux quarrez BF & F V eſt égale à la ſomme du quarré B V, du rectangle B N X pris deux fois, & du quarré de F N pris deux fois ; or le quarré B F eſt par Euclide égal au quarré BN, au quarré N F, & au rectangle B N F pris deux fois, nous avons donc la ſomme des quarrez B N, N F, F V, & du rectangle B N F pris deux fois égale à la ſomme du quarré BV du rectangle B NF pris deux fois, & du quarré de FN pris deux fois : ôtez de châque côté le rectangle BNF pris deux fois, & le quarré N F, il reſtera donc que le quarré de BN, & le quarré FN ſeront égaux aux quarrez BV & FN, or le quarré FV eſt plus grand que le quarré de F V par la conſtruction, donc le quarré B V eſt plus grand que celuy de B N, & partant la droite B V eſt plus grande qne la droite B N, mais nous avons prouvé que comme la droite B F eſt à F D, ainſi N F eſt à F X, donc comme la droite B F eſt à F N, ainſi ſera D F à F X, & par la converſion des raiſons, comme B F à B N, ainſi ſera D F à DX, & comme B F à D F, ainſi B N à D X, mais nous avons fait comme BF à D F, ainſi B V à Y V, donc comme B V à YV, ainſi ſera B N à D X, mais nous avons prouvé que B V eſt plus grande que B N , donc Y V le ſera plus que D X. Or il a eſté déja prouvé que V H eſt plus grande que les deux droites H F & FX, donc il eſt pleinement prouvé que les deux droites Y V & V H ſont plus grandes que les trois D X, X F, & F H, ou que les deux D F & F H, & ainſi la demonſtration eſt complette. Il ſuit de là qu'en poſant mon principe, que la nature agit toûjours par les voyes les plus courtes, la ſuppoſition de Monſieur Deſcartes eſt fauſſe lors qu'il dit que le mouvement de la lumiere ſe fait plus aiſement dans l'eau, & les autres corps denſes que dans l'air, & les autres corps rares, car ſi cette ſuppoſition de M. Deſcartes étoit vraye, & qne vous imaginiez qu'en ma figure l'air eſt du côté de H, & l'eau du côté de B, il s'enſuivroit en tranſpoſant la demonſtration que le rayon qui partiroit du point H, & rencontreroit l'eau au point F ſe romproit vers B, parce que le mouvement par l'air étant plus lent ſelon la ſuppoſition de Monſieur Deſcartes, il ſeroit meſuré par la droite H F, & celuy qui ſe fait dans l'eau ſeroit meſuré par la droite F D, comme étant plus vite, de ſorte que les deux droites H F, F D, étant les plus petites, la refraction ſe feroit vers B, c'eſt à dire que le rayon s'écarteroit de la perpendiculaire, ce qui eſt abſurde & contre l'experience ; ſi la ſitüation des deux points B & H change dans les deux lignes BF & FH prolongées de part & d'autre autant que vous voudrez, la demonſtration aura lieu, & vous le verrez de vous méme. Je n'adjoûte point l'analyſe, car outre qu'elle eſt longue & embarraſſée, il vous doit ſuffire que le retour que vous venez de lire eſt court & purement Geometrique ; il ſuit de tout cela, que lors que les deux points B & F ſont donnez, ou bien H & F, on peut trouver aiſement le probleme par les plans, mais lors qu'on donne deux points C, O, B, & H, & qu'on veut chercher par eux le point de refraction dans la ligne ou plan qui ſepare les deux milieus, en ce cas le probleme eſt ſolide, & ne ſe peut conſtruire qu'en y employant des paraboles, des hyperboles, ou des ellipſes, mais comme cette invention n'eſt guere mal-aiſée à un Geometre mediocre en demeurant d'accord du fondement, & de la proportion ſur laquelle il doit travailler, & que je vous ay déja expliquée, je n'ay garde de doûter que vous ne la trouviez d'abord, vous, Monſieur, qui eſtés ſi fort au deſſus du commun ; outre que ne s'agiſſant proprement dans la queſtion que vous me faites, qne d'apprendre quelles ſont les voyes de la nature, j'y ay déja ſatisfait, & que cette grande ouvriere n'a pas beſoin de nos inſtrumens & de nos machines pour faire ſes operations.

Lettre de Monſieur de Fermat à Monſieur de Roberval à Paris.

MONSIEUR,

Aprés vous avoir remercié de vos civilitez, & proteſté que je ſeray ravy d'avoir des occaſions à vous plaire, je vous ſupplieray de me faire part de vôtre invention ſur le ſujet des tangentes des lignes courbes, & encore de vos ſpeculations mechaniques ſur la percuſſion, puiſque vous me faites eſperer la communication de vos penſées en cette matiere. Aprés cela je vous diray que Mr. Frenicle m'a donné depuis quelque temps l'envie de découvrir les myſteres des nombres, en quoy il me ſemble qu'il eſt extremement verſé; je luy ay envoyé les belles propoſitions ſur les progreſſions Geometriques, qui commencent à l'unité, leſquelles j'ay non ſeulement trouvées, mais encore demonſtrées, bien que la demonſtration en ſoit aſſez cachée, ce que je vous prie d'eſſayer, puiſque vous les avez veües; mais voicy ce que j'ay découvert depuis ſur le ſujet de la propoſition 12. du 5. Livre de Diophante, en quoy j'ay ſuppleé, ce que Bachet advoüe n'avoir pas ſceu & rétably en méme temps la corruption du texte de Diophante, ce qui ſeroit trop long à vous deduire: il ſuffit que vous voyez ma propoſition, & que je vous faſſe plûtôt ſouvenir que j'ay autrefois demonſtré qu'un nombre moindre de l'unité qu'un multiple du quaternaire n'eſt ny quarré ny compoſé de deux quarrez, ny en entiers, ny en fractions. J'en demeuray là pour lors, bien qu'il y ait beaucoup de nombres plus grands de l'unité qu'un multiple du quaternaire, qui pourtant ne ſont ny quarrez ny compoſez de deux quarrez, comme 21, 33, 77, &c. ce qui a fait dire à Bachet ſur la diviſion propoſée de 21. en deux quarrez, quod quidem impoſſibile eſt, ut reor, cum is neque quadratus ſit, neque ſuaptè natura compoſitus ex duobus quadratis, où le mot de, reor, marque évidemment qu'il n'a point ſceu la demonſtration de cette impoſſibilité, laquelle j'ay enfin trouvée & compriſe generalement dans la propoſition ſuivante.

Si un nombre donné eſt diviſé par le plus grand quarré qui le meſure, & que le quotient ſe trouve meſuré par un nombre premier moindre de l'unité qu'un multiple du quaternaire; le nombre donné n'eſt ny quarré, ny compoſé de deux quarrez, ny en entiers, ny en fractions. Exemple, ſoit donné 84. le plus grand quarré qui le meſure eſt 4. le quotient 21. lequel eſt meſuré par trois, ou bien par 7. moindres de l'unité qu'un multiple de 4. je dis que 84. n'eſt ny quarré ny compoſé de deux quarrez, ny en entiers ny en fractions.

Soit donné 77. le plus grand quarré qui le meſure eſt l'unité, le quotient 77. qui eſt icy le méme que le nombre donné ſe trouve meſuré par 11. ou par 7. moindres de l'unité qu'un multiple du quaternaire; je dis que 77. n'eſt ny quarré ny compoſé de deux quarrez ny en entiers ny en fractions, &c.

Je vous advoüe franchement que je n'ay rien trouvé en nombres qui m'aye tant plû que la demonſtration de cette propoſition, & je ſeray bien aiſe que vous faſſiez effort de la trouver, quand ce ne ſeroit que pour apprendre ſi j'eſtime plus mon invention qu'elle ne vaut. J'ay demonſtré en ſuite cette propoſition qui ſert à l'invention des nombres premiers.

Si un nombre eſt compoſé de deux quarrez premiers entr'eux, je dis qu'il ne peut eſtre diviſé par aucun nombre premier moindre de l'unité qu'un multiple du quaternaire.

Comme par exemple adjoûtez l'unité, ſi vous voulez, à un quarré pair, ſoit le quarré

1000000000. lequel avec un,fait 1000000000. Je dis que 1000000001, ne peut être divisé par aucun nombre premier moindre de l'unité qu'un multiple de 4. Et ainsi lorsque vous voudrez éprouver s'il est nombre premier, il ne faudra point le diviser ny par trois, ny par 7. ny par 11. &c.

Si ne faut-il pas oublier tout à fait la Geometrie, voicy ce qu'on m'a proposé, & que j'ay trouvé tout aussi-tôt.

Per datum extra vel intra parabolam punctum rectam ducere quæ abscindat segmentum à parabolâ æquale dato spatio. Et si punctum sit intra parabolam, determinare minimum quod à parabola per dictum punctum abscindi possit spatium.

Si vous ne rencontrez pas d'abord la construction je vous feray part de la mienne. J'attens de vos nouvelles, & suis, &c.

A Monsieur de ****

Du 18 Octobre 1640.

MONSIEUR,

Les vacations qui m'ont éloigné de Tolose m'ont en même temps éloigné de mon devoir, & empéché de vous écrire plûtôt depuis la derniere de vos lettres en datte du 21. Septembre. Je tâcheray de reparer par celle-cy la longueur de l'attente, & commenceray par la liberté que je prens de vous dire que je n'ay point veu encore aucune proposition de vôtre part, que je n'eusse plûtôt trouvée & considerée, & afin de vous rendre vous méme juge de cette verité, & vous ôter en méme temps le scrupule que vous pourriez avoir que je n'en uze comme quelqu'un de ceux du lieu où vous estes qui s'attribüe impunement les inventions d'autruy, apres qu'elles luy ont esté communiquées: je commenceray par la proposition de la difference de deux quarrez que vous trouverez dans Bachet sur le Diophante au Commentaire de la proposition 11. du 3. Livre en méme façon que vous me l'avez envoyée, vous advoüant pourtant que l'application que j'estime beaucoup est toute vôtre, & que je l'ay apprise de vous. Pour le sujet des progressions, je vous avois envoyé par advance les propositions qui servent à determiner les parties des puissances -1, & par ma seconde Lettre je vous avois fait comprendre que j'avois consideré toutes les propositions qui servent aux puissances plus un, dequoy je m'étois contenté de vous donner deux exemples, dont l'un étoit demonstré par moy, & par consequent connu necessairement, & l'autre ne m'étoit point entierement connu par raison demonstrative, bien que je vous asseurasse que je n'en doutois pas: or pour venir à la connoissance de ce dernier quoy qu'imparfaite encore & non achevée, je ne le pouvois sans avoir plûtôt examiné & prouvé par demonstrations toutes leurs propositions contenües en vôtre derniere, ce que vous n'aurez nulle peine de croire, puisque le seul exemple que je vous envoyay le marquoit assez, auquel j'adjoûtois qu'en toutes progressions on pouvoit determiner les diviseurs communs & generaux avec pareille aisance: Mais je vous advoüe tout net (car par advance je vous advertis que comme je ne suis pas capable de m'attribüer plus que je ne sçay, je dis avec méme franchise ce que je ne sçay pas) que je n'ay peu encore demonstrer l'exclusion de tous diviseurs en cette belle proposition que je vous avois envoyée, & que vous m'avez confirmée touchant les nombres 3, 5, 17, 257. 65537. &c. Car bien que je reduise l'exclusion à la plus part des nombres, & que j'aye méme des raisons probables pour le reste, je n'ay peu encore demonstrer necessairement la verité de cette proposition, de laquelle pourtant je ne doûte non plus à cette heure que je faisois auparavant. Si vous en avez la preuve asseurée vous

m'obligerez de me la communiquer ; car apres cela rien ne m'arrestera en ces matieres.

Reste à vous parler de la proposition fondamentale des parties aliquotes, laquelle m'étoit tellement connue que je vous l'avois envoyée par la premiere Lettre que je vous écrivis, laquelle on m'a dit depuis s'être égarée. Pourtant si le Pere Mersenne veut prendre le soin de la faire chercher dans le Bureau de la Poste elle se trouvera dans un paquet que j'adressois à Monsieur ..... Outre que cette proposition est si naturelle qu'il est impossible de determiner & de trouver la moindre chose sur ce sujet qu'elle ne se presente d'abord. De sorte qu'ayant depuis fort long-temps trouvé & envoyé les propositions des deux nombres 17296. & 18416. & autres pareilles, il faloit par necessité que j'eusse passé par ladite proposition. Pour vôtre application, il me semble qu'elle n'oste pas la longueur que je trouvois en cette sorte de questions, qui est la seule difficulté que j'y ay toûjours reconnuë : sinon que je ne l'aye pas bien comprise, dequoy je vous prie m'avertir & me rendre certain. Il me semble apres cela qu'il m'importe de vous dire le fondement sur lequel j'appuye les demonstrations de tout ce qui concerne les propositions Geometriques qui est tel.

Tout nombre premier mesure infailliblement une des puissances – 1. de quelque progression que ce soit, & l'exposant de ladite puissance est soûs-multiple du nombre premier donné – 1. Et aprés qu'on a trouvé la premiere puissance qui satisfait à la question, toutes celles dont les exposans sont multiples de l'exposant de la premiere satisfont de méme à la question.

Exemple, soit la progression donnée,

1 2 3 4 5 6
3 9 27 81 243 729, &c.

Avec ses exposans au dessus.

Prenez, par exemple, le nombre premier 13. il mesure la troisiéme puissance – 1, de laquelle 3. exposant est soûsmultiple de 12. qui est moindre de l'unité que le nombre de 13. Et parce que l'exposant de 729. qui est 6. est multiple du premier exposant 3. il s'ensuit que 13. mesure aussi ladite puissance de 729 – 1. Et cette proposition est generalement vraye en toutes progressions & en tous nombres premiers. Dequoy je vous envoyerois la demonstration, si je n'apprehendois d'étre trop long. Mais il n'est pas vray que tout nombre premier mesure une puissance + 1 en toute sorte de progressions. Car si la premiere puissance – 1 qui est mesurée par ledit nombre premier a pour exposant un nombre impair, en ce cas il n'y a aucune puissance + 1 dans toute la progression qui soit mesurée par ledit nombre premier.

Exemple, parce qu'en la progression double 23. mesure la puissance – 1 qui a pour exposant 11, ledit nombre 23. ne mesurera aucune puissance + 1 de ladite progression à l'infini.

Que si la premiere puissance – 1 qui est mesurée par le nombre premier donné a pour exposant un nombre pair : en ce cas la puissance + 1 qui a pour exposant la moitié dudit premier exposant sera mesurée par le nombre premier donné.

Toute la difficulté consiste à trouver les nombres premiers, qui ne mesurent aucune puissance + 1 en une progression donnée. Car cela sert, par exemple, à trouver que les deux nombres premiers mesurent les radicaux des nombres parfaits, & a mille autres choses, comme par exemple, d'où vient que la 37. puissance – 1 en la progression double est mesurée par 223. En un mot il faut determiner quels nombres premiers sont ceux qui mesurent leur premiere puissance – 1 & en telle sorte que l'exposant de ladite puissance soit un nombre impair, ce que j'estime fort mal-aisé, en attendant un plus grand éclaircissement de vôtre part, & qu'il vous plaise deffendre cét endroit de vôtre Lettre, où vous dites qu'aprés avoir trouvé que le diviseur doit étre multiple + 1 de l'exposant, il y a aussi des regles pour trouver le quantiéme desdits multiples + 1 de l'exposant doit étre le diviseur. Voicy une de mes propositions que peut-étre vous aurez aussi trouvée que j'estime beaucoup, bien qu'elle ne découvre pas tout ce que je cherche, que

ſans doûte j'acheveray d'apprendre de vous.

En la progreſſion double, ſi d'un nombre quarré, generalement parlant, vous, oſtez 2. ou 8. ou 32. &c. les nombres premiers moindres de l'unité qu'un multiple du quaternaire, qui meſureront le reſte feront l'effet requis comme de 25. qui eſt un quarré, ôtez 2. le reſte 23. meſurera la 11. puiſſance — 1, oſtez 2. de 49. le reſte 47. meſurera la 23. puiſſance — 1.

Oſtez 2. de 225. le reſte 223. meſurera la 37. puiſſance — 1 &c.

En la progreſſion triple, ſi d'un nombre quarré, ut ſupra, vous oſtez 3. ou 27. ou 243. &c.

Les nombres premiers & moindres de l'unité qu'un multiple du quaternaire, qui meſureront le reſte feront l effet requis, comme,

Oſtez 3. de 25. le reſte 22. eſt meſuré par 11. qui eſt premier & moindre de l'unité qu'un multiple de 4. auſſi 11. meſure la 5. puiſſance — 1.

Oſtez 3. de 121. le reſte 118. eſt meſuré par 59. moindre de l'unité, &c. auſſi 59. meſure la 29. puiſſance — 1.

En la progreſſion quadruple il faut oſter 4. ou 64. &c. à l'infini en toutes progreſſions en procedant de méme façon.

J'adjoûteray encore cette petite propoſition.

Si d'un quarré vous oſtez 2. le reſte ne peut être diviſé par aucun nombre premier, qui ſurpaſſe un quarré de 2. comme prennés pour quarré 100000. duquel oſté 2. reſte 99998. je dis que ledit reſte ne peut être diviſé ny par 11. ny par 83. ny par 167. &c. vous pouvez éprouver la méme regle aux quarrez impairs, & ſi je voulois je vous la rendrois belle & generale, mais je me contente de vous l'avoir indiquée ſeulement.

Avant que finir, voicy une autre propoſition, laquelle vous fournira peut-etre quelque application, comme vous y êtez tres-heureux.

Si un nombre eſt meſuré par un autre, & que le nombre diviſé ſoit encore diviſé par un autre nombre moindre que le premier diviſeur: en ce cas, ſi vous oſtez du quotient de la ſeconde diviſion multiplié par la difference des deux diviſeurs, le reſte de la ſeconde diviſion, ce qui reſtera ſera meſuré par le premier diviſeur.

Exemple, 121. eſt meſuré par 11.

Diviſez encore 121. par 7. le quotient ſera 17. & le reſte de ladite diviſion 2.

Multipliez le quotient 17. par 4. difference du premier & ſecond diviſeur & du produit 68.

Oſtez en 2. le reſte 66. ſera auſſi meſuré par 11. premier diviſeur.

Que ſi le ſecond diviſeur eſt plus grand que le premier; en ce cas ſi vous adjoûtez au quotient de la ſeconde diviſion multiplié par la difference des deux diviſeurs le reſte de la ſeconde diviſion, ce qui reſtera ſera meſuré par le premier diviſeur.

Exemple, 117. eſt meſuré par 3.

Diviſez encore 117. par 4. le quotient ſera 29. & le reſte de ladite diviſion 1.

Adjoûtez au quotient 29. multiplié par la differencce des diviſions qui ne change icy rien, parce que c'eſt l'unité, le reſte de ladite diviſion qui eſt 1. la ſomme 30. ſera auſſi meſurée par 3. premier diviſeur.

J'ay déja trop écrit, & il me ſemble qu'il eſt temps que vous parliez aprés avoir employé ſi mal vôtre temps à lire cette longue lettre, qui vous confirmera que je ſuis &c.

Lettre de Monsieur de Roberval à Monsieur de Fermat.

Du 4. Aoust 1640.

MONSIEUR,

Encore que depuis prés de trois ans je n'aye eu l'honneur d'avoir commerce avec vous, je n'ay pourtant pas esté privé entierement du plaisir que je reçois de vos speculations Mathematiques. Car le Pere Mersenne m'a fait la faveur de me communiquer la plus grande partie des Lettres qu'il a receües de vous depuis ce temps là, dans lesquelles, j'ay reconnu une augmentation continüelle, & tres-sensible en la beauté & solidité de vos pensées, ausquelles il n'y a rien que d'admirable, soit sur le sujet de la Geometrie ou de l'Arithmetique: sur tout je suis ravi de vôtre invention (de minimis & maximis) & du moyen par lequel vous l'appliquerez à la recherche des touchantes des lignes courbes, & ne croy pas que jusques icy il se soit veu rien sur ce sujet, qui ne cedat de beaucoup à ce que vous nous en avez donné : car l'invention de Mr. Descartes, à laquelle j'assigne le premier lieu apres la vôtre, n'en aproche que de bien loin, parce que quoy qu'elle puisse être rendüe universelle, ce qu'il n'a pas fait & le pourra maintenant à l'imitation de vôtre derniere addition, toutesfois elle est sans comparaison plus longue, plus embarrassée & plus difficile. Je vous diray que j'ay d'autant plus admiré vôtre invention, qu'à peine croyois-je que pour trouver les touchantes des lignes courbes, qui n'ont rapport qu'à d'autres courbes, ou partie à des droites, & partie à des courbes, on peut s'en servir, ce que Monsieur Descartes advoüe de la sienne sur le sujet de la roulette & autres lignes pareilles, lesquelles pour cette consideration il rejette de la Geometrie, sans raison, puis qu'à l'imitation de vôtre derniere addition, sa methode peut être rendüe universelle comme la vôtre, mais avec une difficulté, laquelle bien souvent ne se pourroit presque surmonter par un esprit humain. Cette opinion fut cause que quand je vis que vous aviés trouvé les touchantes de la roulette, & que vous assuriez avoir la regle universelle pour toutes les lignes courbes, je creus qu'elle ne pouvoit être autre que celle que j'avois inventée au temps même que j'inventay cette roulette, laquelle regle ou methode je n'avois encore communiqué à personne m'étant contenté d'en avoir demonstré les effets à Monsieur Paschal en la tangente de la quadratrice qui se trouvoit des plus difficiles, y joignant la demonstration Geometrique comme a fait Archimede en celle de la spirale, laquelle par ma methode s'expedie en deux mots. J'avois fait la même chose en la Cissoide, & avois demonstré de plus que ces deux lignes courbes sont infinies de leur nature, & ont des asymptotes paralelles entr'elles, ce qu'on m'a assuré avoir esté déja demonstré par un Auteur dont on ne m'a peu dire le nom. J'ay aussi demonstré les tangentes des lignes courbes qui se décrivent avec un compas sur la superficie d'un Cylindre, puis se reduisent en plan, & en general celles de toutes les lignes courbes qui ont peu venir à ma connoissance, & cette methode est tellement differente de la vôtre (contre ma premiere opinion) qu'elles ne se ressemblent en rien qu'en la conclusion. Depuis Monsieur Mydorges faisant quelques difficultez sur la vôtre, je luy en donnay la solution, & en même temps je luy ouvris les principes de la mienne, & luy en fis voir un essay en la Cissoide : si je sçay que vous l'ayés agreable je vous en écriray. Elle n'est pas inventée avec une si subtile & si profonde Geometrie que la votre, ou celle de Monsieur Descartes, & partant elle paroit avec moins d'artifice ; en recompense elle me semble plus simple, plus naturelle & plus courte, de sorte que pour toutes les touchantes dont j'ay parlé il ne m'a pas mé-

mes esté besoin de mettre la main à la plume. Depuis cette invention je me suis appliqué aux lieux solides (ad tres & ad quatuor lineas) lesquels j'ay entierement restituez, quoy que pour n'y rien oublier, il ne faille gueres moins de discours qu'aux six premiers livres des elemens. C'est dequoy je vous entretiendray une autre fois, parce qu'il y a quelque chose qui me semble le meriter. En suite j'ay consideré la percussion, le mouvement, & les autres effets, que cause quelque impression soit violente ou naturelle, en quoy je ne croy pas avoir mal employé le temps, puis qu'en une matiere si épineuse, encore ay-je découvert quelque chose de grande utilité, à ce que je pense, & laquelle je pourray peut-être augmentet avec le temps. J'oubliois presque à vous dire que les nombres dont vous avés déja découvert des proprietez admirables, contiennent de grands mysteres, mais pour les mieux découvrir, il faudroit être plusieurs ensemble d'accord & sans jalousie, & desquels le genie fut naturellement porté à cette speculation, ce qui est tres-difficile à rencontrer. Si ce sujet vous plaît, ou quelqu'un de ceux dont j'ay parlé cy-dessus, je prendray aussi plaisir à le considerer plus particulierement, esperant que vous me ferés part de vos inventions, dequoy je vous supplie en qualité de, &c.

Lettre de Monsieur de Frenicle à Monsieur de Fermat.

Du 4. Aoust 1641.

MONSIEUR,

J'etois dans l'impatience de sçavoir vôtre retour à Tolose, pour me donner l'honneur & le contentement de continüer nos conferences, lorsque le R. P. Mersenne m'en a donné advis; j'espere qu'elles dureront plus long-temps que je ne pensois, par ce qu'il est survenu quelque chose qui m'arréte icy. J'ay mille remerciemens à vous faire de la limitation des côtez que vous m'avez envoyée, laquelle veritablement je prise fort, j'avois bien reconnu que la proportion étoit irrationelle, & pour cela je m'etois contenté des raisons de 10. à 24. & à 25. mais vous l'entendez icy à l'infiny. J'avois crû par la lecture de vôtre precedente, par laquelle vous mandiez qu'il étoit aisé de la trouver, que vous pretendissiez de donner une raison rationelle pour cette limitation; c'est ce qui m'avoit fait dire, que peut-être ne la trouveriez-vous pas si facile, parceque je la sçavois étre impossible. Je sçay que l'Algebre de ce païs-cy ce n'est pas propre pour soudre ces questions, ou pour le moins on n'a pas encore icy trouvé la maniere de l'y appliquer; c'est ce qui me fait croire que vous vous estés fabriqué depuis peu quelque espece d'Analyse particuliere pour foüiller dans les secrets les plus cachez des nombres, ou que vous avez trouvé quelque adresse pour vous servir à cét effet de celle que vous aviez accoûtumé d'employer à d'autres usages. Si la demonstration de cette limitatiou étoit courte, vous m'obligeriez beaucoup de me l'envoyer, car si elle est trop longue, je ne voudrois pas que vous vous detournassiez de vos études à cette occasion. Cette méme raison de 1. à 1 + 2. se peut aussi appliquer à la proportion des côtez des quarrez qui composent l'hypotenuse, mais en un sens contraire à celuy des parties plus prochaines du côté impair, comme aussi elle se peut appliquer aux nombres qui composent la moitié des côtez pairs, au méme sens qu'aux parties des impairs. Je viens maintenant a ce qui regarde les triangles.

Les methodes que vous donnez, tant pour trouver les quarrez, que les côtez des triangles qui appartiennent aux hypotenuses composées sont veritablement fort belles, & vous avez la methode de si bien disposer vos regles, que cela leur donne une certaine grace, qui les fait encore agreer davantage, mais elles ne suivent pas mon intention, car je n'ay

point entendu qu'on ſe ſervit des quarrez, ny des triangles des parties des hypotenuſes compoſées, mais ſeulement deſdites parties, par exemple, je demande une maniere de trouver que 65. eſt compoſé des quarrez 64. 1. & 49. 16. ſupoſant ſeulement qu'il a 5. & 13. pour les parties premieres, ſans employer à cét effet le quarré 4. & 1. ny les côtez 3. & 4. non plus que ceux qui apartiennent à 13.

Des 4. proprietez des triangles que je vous avois propoſées, vous avez fort bien trouvé la 2. pour les 3. autres vous n'avez pas ſuivi mon intention, partant il faut que je m'éclairciſſe plus que je n'avois fait. La premiere eſt facile.

Que le triangle rectangle ſoit A B C, il le faut diviſer en deux triangles A B D, A D C, avec la perpendiculaire A D.

Et derechef le triangle A D C, en deux triangles E D C, par la perpendiculaire D E & l'autre pareillement A B D, en deux, ſçavoir, A D F. B D F, par la perpendiculaire DF.

Et derechef les triangles B D F, A D F, A D E, D E C, par les autres perpendiculaires FO, F I, E L, E N, & continüer ainſi tant qu'on voudra, & faire que toutes les lignes, & ſections d'icelles, comme A L, L I, I O, B O, O D, D N. N C, ſoint nombres entiers.

Vous donnez par aprés les triangles dont le moindre côté eſt different d'un quarré de chacun des deux autres. Je ſçay bien que la moitié de ceux qui ont 1. pour difference de leurs petits côtez, ont auſſi cette proprieté, ſçavoir, ceux qui commencent par un nombre pair, mais je n'attendois pas que vous deuſſiez vous ſervir de ceux là, eſperant que vous donneriez le moyen de les trouver tous, & afin d'exclurre les ſuſdits, on pourroit ainſi propoſer le probleme.

Donner tous les triangles qui ont un quarré pour difference de leur petit côté à chacun des deux autres côtez, en ſorte que l'une des differences ne puiſſe pas meſurer l'autre.

Pour l'autre proprieté des triangles, qui eſt d'avoir un autre triangle relatif en differences, en ſorte que la difference des deux grands côtez du premier ſoit celle des deux petits côtez du ſecond, & la difference des deux petits côtez du premier ſoit celle des deux grands côtez du ſecond comme on voit aux triangles.

$$11.^{49}.\ 60.^{1}.\ 61. \quad | \quad 119.^{1}.\ 120.^{49}.\ 169.$$

Vous n'avez pas conſideré attentivement cette propoſition, car les triangles que vous donnez,

$$449.^{98}\ 351.^{71}\ 280. \quad | \quad 949.^{98}\ 851.^{431}\ 420.$$

N'ont pas cette proprieté, mais en ont une autre, qui eſt que les grands côtez de châcun ont pareille difference, ſçavoir 98. & en outre que les 2. hypotenuſes ont pareille difference que les deux grands côtez, mais ce n'eſt pas ce que je demande, car aux triangles,

$$11.^{49}\ 60.^{1}\ 61. \ \&\ 119.^{1}\ 120.^{49}\ 169.$$

Vous voyez que 120. & 169. n'ont pas méme difference que 60. & 61. ny 61. & 169. méme difference que 60. & 120. Il faudroit donc pour ſatisfaire à la queſtion qu'en vos triangles, il y eût méme difference de 449. à 351. que de 851. à 420. & de 351. à 280. que de 949. à 851.

Vous me propoſez par aprés de trouver un nombre qui ſoit polygone autant de fois qu'on voudra & non plus. Je vous diray qu'il y a quelques années que je m'étois mis a la recherche de cela, mais à peine eus-je commencé, que je m'adviſay, que les figures qui ſont maintenant en uſage ſont ſi extravagantes, lors qu'on les veut mettre en pratique, j'entens quand on les veut repreſenter avec des jettons, ou des points, qu'on les nommeroit plus à propos chimeres, ou croteſques, que figures, leſquelles ſi elles ne ſont entierement regulieres, au moins doivent elles en aprocher le plus que faire ſe peut.

Cela fut cauſe que je quittay ce que j'avois commencé pour me mettre à reformer ces figures, & Dieu m'a fait la grace d'y reüſſir en quelque façon, car j'ay trouvé une maniere de faire des figures regulieres en nombres d'une infinité de ſortes, & d'autres

X 4

aussi qui n'ont point d'angles ingrediens de tant de côtez qu'on voudra. J'ay en suite consideré quelques-unes de leurs proprietez, & ce qui depend d'icelles, de sorte que je ne me suis pas beaucoup arresté aux figures communes, que je nommerois plûtôt progression de triangles que figures, à cause de l'assemblage des triangles, par lequel elles sont formées. Je croy bien que ce n'est pas de ces nouvelles figures dont vous voulez parler, car possible ne vous en estez vous pas encore advisé ; mais pour les communes, on peut considerer vôtre question en deux manieres.

La premiere, si le nombre demandé est plusieurs fois polygone, de telle sorte, qu'il envelope tous les polygones inferieurs, c'est à dire que si ce nombre est par exemple Eptagone il doive aussi être Exagone, Pent. Quarré, & triangle ; & ainsi pour avoir un nombre qui fut 7. fois polygone, il en faudroit donner un qui fut figure de 9. 8. 7. 6 5. 4. & 3. côtez ; ce qui seroit à la verité fort difficile, & il faudroit un nombre fort grand pour y satisfaire, car les nombres qui sont seulement triangles, quarrez, & pentagones deviennent incontinent fort grands, & c'est à cela que j'avois commencé à travailler.

L'autre consideration est, qu'un nombre soit polygone en plusieurs façons, sans se soucier si les polygones sont de suite ou non ; je n'ay pas encore recherché cela ; si vous l'avez trouvé, vous m'obligerez de me le communiquer.

L'autre question que vous me faites contient deux problemes, l'un de choisir un nombre qui soit la somme des deux petits côtés de tant de triangles qu'on voudra, & non plus.

L'autre est de determiner à combien de triangles un nombre donné est la somme des deux petits côtez.

Pour soudre ces problemes, il faut considerer que tout nombre premier different de l'unité d'un nombre divisible par 8. est la somme des deux petits côtez d'un triangle, & tout nombre qui est la somme des deux petits côtez d'un triangle, auquel les côtez sont premiers entr'eux differe de l'unité d'un nombre divisible par 8.

Sur ces fondemens il faut faire la méme chose avec ces nombres, qu'on feroit sur les nombres premiers pairement pairs + 1. pour trouver ce qui est requis par les problemes si on demandoit des hypotenuses, au lieu de la somme des deux petits côtez ; il seroit superflu de deduire cela plus au long, intelligenti loquor. Si vôtre methode est autre que celle-là, vous m'obligerez de me la communiquer, & aussi de quelle façon se pourroit trouver le triangle, ayant seulement la somme de ses petits côtez ; sans avoir les quarrez & doubles quarrez, dont elle est la difference ; car ces sommes ont cette propieté d'être toûjours deux fois la difference d'un quarré, & d'un double quarré, & si cette somme est un nombre composé d'autres de méme nature, comme 119. composé de 17. & 7. il sera 4. fois la difference d'un quarré, & d'un double quarré.

Il faudroit aussi trouver la méme chose pour l'enceinte entiere des triangles, que pour la somme des deux petits côtez.

Sur le sujet des triangles, voicy ce que je vous proposeray encore.

Une hypotenuse composée étant donnée avec les quarrez premiers entr'eux qui la composent par leur addition, trouver ses parties.

Que 221. soit l'hypotenuse donnée, avec les quarrez qui la composent, sçavoir 100. 121. & 196. 25. il faut trouver par le moyen d'iceux que 221. à 13. & 17. pour parties.

J'attens de vous la maniere de trouver les nombres premiers qui ne mesurent que les puissances − 1. en toute analogie, & principalement en celle de 2. Je suis, &c.

Lettre

Lettre de M. de Frenicle à M. de Fermat.

Du 6. Septembre 1641.

MONSIEUR,

Vôtre regle pour trouver les triangles pareils à 11. 60. 61. & 119. 120. 169. est fort bonne, je m'étois seulement arrêté à l'exemple, sans la considerer autrement, mais celle que vous mettez en suite pour les triangles dont le moindre côté differe d'un quarré des 2. autres, sert à la verité pour trouver quelques-uns de ces triangles, mais non pas pour les trouver tous ainsi que vous pretendez, car prenant tous les nombres qui sont en proportion comme le quarré + 1. de quelque nombre au double – 2. du méme nombre, on ne trouvera pas les triangles, qui se font par 29. & 12. ou par 60. & 293. & une infinité d'autres, mais on les trouvera tous par la regle que vous mettez en l'écrit particulier que vous avez envoyé, qui se fait metant pour un des nombres constitutifs du triangle un nombre composé de 2. quarrez premiers entr'eux, & de divers ordres.

Et cette derniere methode sert à trouver tous les primitifs dont les côtez du quarré sont comme d'un nombre impair à un autre nombre; par exemple on trouvera par icelle qu'il y a 2. triangles, où les côtez quarrez sont comme de 65. à un autre nombre, & dont le moindre côté est different d'un quarré des 2. autres, sçavoit les deux qui sont faits de 65. & 14. & de 65. & 24. & les autres qui sont en méme proportion. Mais si on vouloit tous les triangles primitifs dont les racines des quarrez sont comme d'un nombre pair à un impair, comme par exemple de 60. à quelqu'autre nombre, on n'y pourroit pas satisfaire par cette 2. regle sinon aprés un long tatonement, & la 1. regle ne donne que la raison de 60. à 1861. Mais il y a encote 3. autres proportions outre celle-là, qui ont toutes 60. pour un de leurs termes. J'ay 2. regles differentes, dont chacune donne tous les triangles susdits, avec cette difference, que l'une regarde la proportion qui commence par un pair, & l'autre celle qui commence par un impair, & celle-cy n'est pas beaucoup differente de vôtre derniere, car ayant pris un triangle primitif, je me sers de son hypotenuse pour le premier terme, & pour l'autre j'ôte d'un des côtez du triangle la difference de l'autre côté à l'hypotenuse. Exemple.

Que 20. 21. 29. soit le triangle, 29. le premier terme, pour l'autre j'ôte de 20. la difference de 21. à 29. ou de 21. la difference de 20. à 29. & restera 12. on aura donc 29. & 12. dont les quarrez composeront le triangle cherché.

Vôtre premiere regle pour trouver 3. quarrez en propottion Arithmetique à le méme defaut que la precedente, car on ne les peut pas trouver tous par icelle, pat exemple, on ne trouvera pas le quarré de 1. 29. 41. ou de 17. 53. 73. mais par la proposition que vous mettez en l'écrit particulier on les peut tous comprendre. Vous pouviez aussi donner aisément par la 1. regle le 3. quarré sans obliger à prendre la difference des 2. quarrez trouvez; comme en l'exemple que vous apportez le quarré – 2. de 5. est 23. le quarré suivant + 1. est 37. si on veut avoir le 3. nombre, il faut adjoûter à 37. le double de 5. & on aura 47.

Si on prenoit 4. son quarré – 2. est 14. le quarré suivant + 1. est 26. auquel adjoûtant 8. double de 4. on aura 34. les 3. nombres étant reduits sont 7. 13. 17.

La methode dont je me sers pour trouver ces 3. quarrez proportionaux est toute autre que celle-là, & voicy comme on procede pour les avoir tous. L'hypotenuse de tout triangle primitif sera le côté du moyen quarré, la difference des 2. côtez du triangle sera le moindre côté, & leur somme sera le plus grand

Exemple. Que le triangle soit 28. 45. 53. le moyen côté sera l'hypotenuse 53. la difference de 28. à 45. qui est 17. sera le moindre & leur somme 73. sera le plus grand, on aura donc 17. 53. 73. pour les racines des quarrez cherchez. Et si on prend tous les triangles commençant par le premier 3. 4. 5. on aura tous lesdits quarrez.

Aprés cette regle generale j'en ay consideré deux particulieres, dont l'une est celle que vous proposez en l'écrit particulier, sçavoir que le moindre des 3. quarrez demeurant toûjours le méme, on ait les 2. autres en une infinité de façons, & à laquelle vous croyez que je n'ay pas pris garde, quoy qu'il y ait déja long-temps que je l'ay trouvée, lorsque je travaillois aux triangles rectangles,

Que tout nombre & chacun d'iceux est la difference des 2. moindres côtez d'une infinité de triangles;

Et tout nombre premier different de l'unité d'un multiple de 8. ou composé desdits nombres premiers seulement, est la difference des moindres côtez d'une infinité de triangles rectangles primitifs.

Et y ayant des voyes certaines pour trouver tous les triangles qui ont une méme difference en leurs moindres côtez, on aura aisement tous les quarrez susdits. Sur quoy il faut remarquer que si le nombre proposé, qui doit être la racine moindre du quarré de 3. & qui doit être la difference des deux petits côtez du triangle n'est divisible que par un seul nombre premier different de 1. d'un octonaire comme sont 7. 49. 343. 17. 289. &c. le nombre sera la difference des petits côtez de 2. triangles qu'on peut nommer Surprimitifs, pource qu'ils sont primitifs des primitifs, car d'iceux dépend l'infinité des autres triangles, & ces deux triangles sont toûjours les moindres, dont l'un commence par un pair, & l'autre par un impair, & d'iceux se forme l'infinité des autres. Voicy la maniere dont je me sers.

3. 2.	4. 1.
8. 3.	9. 4.
19. 8.	2. 9.
46. 19.	53. 22.

Si je veux par exemple avoir tous les triangles qui ont 7. de difference entre leurs moindres côtez je cherche les deux premiers triangles qui ont cette difference, & trouve 5. 12. 13. & 8. 15. 17. je prens les racines des quarrez de chaque triangle, sçavoir 3. 2. & 4. 1. & mets chaque couple en teste d'une colomne. J'ay donc pour le 1. 3 2. Pour avoir le triangle suivant je prens la plus grande racine du 1. pour la moindre du 2. sçavoir 3. & pour la plus grande je prens le double de la plus grande du 1. + la moindre, ainsi j'auray 8. qui est double de 3 + 2. ce 8. sera la moindre racine du 3. triangle, & la plus grande dudit 3. sera 19. qui est double de 8 + 3. on fera la méme chose à l'autre couple 4. 1. & on poursuivra aussi loin qu'on voudra.

Ayant donc tous les triangles qui ont 7. pour difference de leurs moindres côtez, il sera facile, parce qui a esté dit cy-devant de trouver tous les quarrez arithmetiquement proportionaux, dont le moindre est 49. Si le susdit moindre quarré étoit divisible par 2. nombres premiers de méme nature que les susdits il y auroit 4. souches, dont tous les triangles dependroient; s'il étoit divisible par 3. nombres premiers, il y en auroit 8. qui ne dependroient point l'un de l'autre, &c. Ainsi 161. composé de 7. & 23. est la difference des petits côtez des triangles surprimitifs 19. 180. 181. | 60. 221. 229. | 279. 440. 521. | & 400. 561. 689. & de chacun d'iceux on peut faire une infinité de triangles primitifs, qui auront le méme 161. pour difference, & partant le quarré de 161. sera le moindre quarré des 3. proportionaux en une infinité de sortes. Il faut excepter l'unité de ce qui a esté dit, car elle sert bien de difference à une infinité de triangles, mais elle n'a qu'une seule souche, qui est le triangle 3. 4. 5. d'où dependent tous les autres; on aura

7. 13. 17.	7. 17. 23.
7. 73. 103.	7. 97. 137.
7. 425. 601.	7. 565. 799.
7. 2477. 3503.	7. 3293. 4657.

donc les quarrez proportionaux, dont les racines sont icy; & on les peut continüer tant qu'on voudra en continüant les triangles. Voila donc pour la 1. chose qui appartient ausdits quarrez.

La 2. est de trouver lesdits 3. quarrez en telle sorte qu'ils soient comme enchainez l'un à

l'antre, & que le dernier & plus grand des 3. soit le 1. des 3. suivans, comme on peut voir en ces colomnes, la fabrique desquelles je vous envoiray au premier voyage; toutefois j'estime que par l'inspection vous la jugerez aisément.

1.	5.	7.	7.	17.	23.	1.	29.	41.
7.	13.	17.	23.	37.	47.	41.	85.	113.
17.	25.	31.	47.	65.	79.	113.	173.	217.
31.	41.	49.	79.	101.	119.	217.	293.	353.
49.	61.	71.	119.	145.	167.	353.	445.	521.
71.	85.	97.	167.	197.	223.	521.	629.	721.
97.	113.	127.						

Il y a aussi des voyes pour avoir les differences égales desdits quarrez, car en la 1. colomne si on multiplie 24. par les sommes de tous lesquarrez, lesquelles sommes sont 1. 5. 14. 30. &c. on aura les differences des quarrez. Et en la seconde colomne il faudroit multiplier 24. par les sommes des seuls quarrez impairs; il y a d'autres choses à considerer là dessus, que je n'ay pas maintenant le loisir de deduire plus au long.

Me voicy maintenant à l'endroit de vôtre Lettre, auquel vous parlez des nombres qui sont la somme des deux petits côtez d'un triangle, & sur ce sujet, je vous dois ôter de l'opinion que vous avez que je ne sceusse pas que chacun de ces nombres peut servir de difference à une infinité de quarrez & de doubles quarrés; vous vous estez fondé sur un advertissement que je donnois, que lesdits nombres sont toûjours 2. fois la difference d'un quarré & d'un double quarré, mais je n'ay pas dit qu'ils fussent seulement 2. fois la difference d'un quarré, & d'un double quarré, comme vous croyez avoir leu; il faudroit avoir bien peu de pratique aux nombres, pour ne s'étre pas apperceu d'abord que 7 est 4. fois la difference entre de fort petits nombres, sçavoir entre 1. & 8. | 2. & 9. | 18. & 25. | 25. & 32. & je ne vous ay pas cotté cela pour une proprieté desdits nombres; mais vous ayant demandé le moyen de trouver le triangle dont un nombre donné est la somme des côtez, sans avoir les quarrez, & doubles quarrez, dont il est la difference, il faloit vous advertir que lesdits nombres étoient toûjours 2. fois la difference d'un quarré, & d'un double quarré, car il y a 2. couples dont je me sers pour avoir ledit triangle, par exemple pour avoir le triangle dont 7. est la somme des 2. côtez je me sers de 1. & 8. & de 2. & 9. & pour ce que j'étois pressé je n'eus pas le loisir de m'éclaircir d'avantage, je n'entens pas que lesdits couples soient 2. 9. & 18. 25. comme vous avez creu, mais 1. 8. & 2. 9. & ce que j'observe en cecy est que lesdites sommes sont 2. fois la difference d'un quarré & d'un double quarré, en chaque couple desquels il y a un nombre moindre que la difference donnée; sçavoir à un des couples le quarré est moindre, & à l'autre couple c'est le double quarré; cela s'observe toûjours ainsi; & aux nombres qui sont composez de 2. nombres premiers comme 119. il y a 4. couples, dont un des nombres est moindre que 119. Et voilà la methode dont je me sers pour voir quels sont les couples utiles pour faire les triangles, car ce sont ceux ausquels un des nombres est moindre que la difference. Ainsi à 17. les 2. couples utiles sont 1. 18. & 8. 25. à chacun desquels couples il y a un nombre moindre que 17. & selon vôtre methode méme on se servira aussi bien de 1. 18. que de 25. 8. car si à 25. 8. on prend 2. & la difference de 5. à 2. de méme à 1. 18. on aura 3. & la difference de 1. à 3. & on aura en l'une & l'autre sorte les mémes nombres 2. 3. De mémes si on donnoit 161. on auroit 4. couples, sçavoir 1. 162. | 8. 169. | 81. 242. | 128. 289. a chacun desquels il y a un nombre moindre que 161. & pour trouver les triangles je me sers des racines des doubles quarrez, car elles sont les racines des quarrez qui composent l'hypothenuse, ainsi à 17. on aura 2. & 3. racines des doubles quarrez 8. 18. mais quand il y en a 4. comme à 161. je prends les extremes, sçavoir 9. 8. & celles du milieu 2. 11. qui donneront les triangles 17. 144. 145. & 44. 117. 125. Pour avoir le côté pair du triangle il faut prendre le double du produit des racines susdites des doubles quarrez, ainsi le double de 9. par 8. est 144. & le

double de 2. par 11. est 44. mais pour le côté impair on prend le produit des racines des quarrez simples; ainsi 1. par 17. donne 17. & 9. par 13. donne 117. le 1. pour le triangle 17. 144. 145. le 2. pour 44. 117. 125. Vous voyés si j'ay eu raison de dire que les nombres susdits sont la difference de 2. couples quand ils sont premiers, & de 4. couples lors qu'ils sont divisibles par 2. nombres premiers. Mais ce qui le montrera encore mieux est la façon de trouver tous les couples dont un desdits nombres est la difference; car selon ma methode il est necessaire d'avoir ces deux couples qui sont comme 2. souches. Exemple.

1.	162.
169.	8.
81.	242.
289.	128.

1.	9.
13.	2.
9.	11.
17.	8.

On me demande tous les quarrez & doubles quarrez dont 7. est la difference. Je cherche les 2. couples utiles à chacun desquels il y a un nombre moindre que 7. j'auray 1. 8. & 9. 2. je prens leurs racines & en fais 2. colomnes separées comme on voit icy, & mets en chaque colomne les racines des quarrez d'un côté, & celles des doubles quarrez de l'autre. J'ay donc d'un côté 1. 2. pour avoir les racines des couples suivans. Je prens la somme de 1. 2. qui est 3. pour la racine du double quarré; & la somme des racines des deux doubles quarrez prochains pour la racine du quarré. Ainsi la somme de 1. 2. est 3. & celle de 3. 2. est 5. j'ay donc 5. & 3. pour le 3. couple, la somme de 5. 3. est 8. celle de 8. & 3. est 11. On poursuit ainsi autant qu'on veut, & l'autre colomne qui commence par 3. 1. se fait de méme. A chaque colomne la rangée de main droite dont les nombres sont pairs & impairs alternativement contient les racines des doubles quarrez, lesquels sont plus grands que les quarrez, lors que la racine du double quarré est paire comme 1. 2. & 11. 8. mais le double quarré est moindre quand sa racine est impaire; ce qui a lieu lorsque le moindre quarré des 2. qui composent l'hypotenuse du triangle dont ladite difference est la somme des côtez, est impair, comme à 3. 4. 5. mais c'est le rebours, quand le moindre quarré est pair comme au triangle 5. 12. 13. Je laisse le reste pour le premier voyage, auquel je vous envoyeray aussi la methode dont je me sers pour former les triangles relatifs en difference, comme 11. 60. 61. & 119. 120. 169. car je ne me sers pas des 3. quarrez proportionaux. Voicy seulement ce que je vous proposeray.

Quarrez	Doubles quarrez.	Quarrez	Doubles quarrez.
1.	2.	3.	1.
5.	3.	5.	4.
11.	8.	13.	9.
27.	19.	31.	22.
65.	46.	75.	53.
157.	111.	181.	128.

1. Trouver le moindre nombre qui soit autant de fois qu'on voudra, & non plus la somme de 2. quarrez.

2. Trouver un triangle auquel le double du quarré du petit côté étant ôté du quarré de la difference des deux moindres côtez, il reste un quarré. Par exemple si le triangle cherché étoit 7. 24. 25. il faudroit qu'ôtant 98. de 289. le reste 191. fut un quarré.

3. Trouver un nombre qui serve d'hypotenuse à tant de triangles qu'on voudra & non plus, à chacun desquels le produit du moindre côté par l'hypotenuse soit plus grand que le quarré du moyen côté.

4. Trouver les bornes des proportions que les racines des quarrez constitutifs du triangle doivent avoir l'une à l'autre, afin que les triangles ayent la proprieté du 3. probleme.

Pour cecy il y a autant de danger que les racines pechent en excez, qu'en defaut, mais elles ont un espace assez grand pour s'égayer, & elles ne sont pas génées comme à l'autre limitation que vous m'avez envoyée. Si les racines sont en proportion double, ou moindre, ou si elles sont en proportion triple, ou plus grande, les triangles n'auront pas ladite proprieté. Entre ces deux proportions il y a un grand espace qui contient une infinité de proportions propres à ces triangles, lequel pourtant n'est pas

ſi grand que la difference & intervalle des proportions double, & triple, mais eſt un peu plus retrecy.

Vous n'avez pas pris garde, que je vous avois propoſé par ma precedente de faire la méme choſe de l'enceinte entiere du triangle que vous demandiez de la ſomme des 2. moindres côtez. Je ſuis, &c.

Lettre de M. de Fermat au Reverend Pere Merſenne de l'Ordre des Minimes. A Paris.

MON REVEREND PERE,

Je vous dois deux réponſes pour les deux dernieres Lettres que j'ay receuës de vôtre part, & que j'ay trouvées toutes deux en méme temps à mon retour de la campagne, le ſujet de la premiere concerne Monſieur Des-Argues, & celuy de la ſeconde Monſieur de Frenicle. Je ſuſpens la réponſe aux queſtions de Monſieur Des-Argues juſques à ce que j'auray veu par vôtre faveur le troiſiéme Livre des Coniques de Mr. Mydorge, & les autres s'il y en a d'imprimez depuis les deux premiers qui ſont les ſeuls que j'ay en mon pouvoir. Je vous promets alors de m'eſtendre ſur tout ce qu'il ſemble que vous deſirés de moy, & cependant je ſuis obligé de vous dire que j'eſtime beaucoup Monſieur Des-Argues, & d'autant plus qu'il eſt luy ſeul inventeur de ſes Coniques. Son livret qui paſſe, dites vous, pour jargon, m'a parû tres-intelligible & tres-ingenieux. Pour Monſieur de Frenicle ſes inventions en Arithmetique me raviſſent, & je vous declare ingenüement que j'admire ce genie, qui ſans ayde d'Algebre pouſſe ſi avant dans la connoiſſance des nombres entiers, & ce que j'y trouve de plus excellent conſiſte en la viteſſe de ſes operations, dequoy ſont foy les nombres aliquotaires qu'il manie avec tant d'aiſance. S'il vouloit m'obliger de me mettre dans quelqu'une de ſes routes, je luy en aurois tres-grande obligation, & ne ferois jamais difficulté de l'advoüer, car les voyes ordinaires me laſſent, & lors que j'entreprens quelqu'une de ces queſtions, il me ſemble que je vois devant moy

Magnum maris æquor arandum,

à cauſe de ces frequentes diviſions qu'il faut faire pour trouver les nombres premiers. Ce n'eſt pas que mon Analyſe ſoit defectueuſe, mais elle eſt lente & longue pour ce regard, & j'oſe dire ſans vanité que ſi je pouvois l'accompagner de cette facilité, je trouverois de fort belles choſes, je voudrois avoir merité par mes ſervices la faveur que je luy demande, & ne deſeſpere pas méme de la payer par quelques inventions qui peut étre ſeront nouvelles à Monſieur Frenicle.

Je viens aux propoſitions des quarrez. Sur quoy je vous puis proteſter que je n'ay jamais veu, ny Stiphelius, ny cette clavicule, & ne ſçay ce que ces Livres contiennent, & pour faire voir que j'ay veu peut-étre plus loin qu'eux, & ſatisfaire à la ſemonce de Monſieur Frenicle, je vous envoye le quarré de 14. aux conditions requiſes, duquel ſi vous ôtez deux enceintes, le reſtant ſera auſſi quarré aux conditions requiſes, & ſi vous ôtez encore deux enceintes de ce reſtant, ce qui reſtera ſera encore quarré aux mémes conditions.

Le 1. Quarré fait en ſes lignes 1379.

Le 2. fait 985.

Le 3. fait 591.

Or ne doutés point que je ne poſſede la methode generale pour faire toute ſorte de

quarrez en cette sorte, & aux conditions qu'ôtant tel nombre d'enceintes qu'on voudra le restant soit encore quarré, &c.

Mais à n'ôter qu'une seule enceinte, je crois la question impossible, à quoy peut-être Monsieur de Frenicle ne prît pas garde, lors qu'il me proposa d'ôter 3. enceintes de 22. & puis 2. du restant & puis une du restant, car aux deux premiers cas la question est faisable en beaucoup de manieres, mais au 3. je ne l'estime point possible, deqnoy la raison dépend de ma regle, laquelle je n'ay pourtant ny trouvée, ny cherchée que depuis que j'ay receu la Lettre de Monsieur Frenicle, & c'est pour cela que je ne determine pas absolûment l'impossibilité de ce cas jusqu'à ce que j'auray eu encore quelques jours pour y songer de nouveau.

Mais ce que je trouve de plus beau en ma regle, & que je ne crois pas avoir esté touché ny par Stiphelius, ny par aucun autre, est que je puis determiner en combien de façons & non plus châque quarré peut-être disposé aux conditions requises, comme par exemple s'il m'est permis de demander à Monsieur Frenicle en combien de sortes differentes 22. peut être rangé.

Je passe bien plus outre en passant aux solides qui le sont effectivement, j'ay trouvé une regle generale pour ranger tous les cubes à l'infiny, en telle façon que toutes les lignes de leurs quarrez tant diagonales, de largeur, de longueur, que de hauteur, fassent un méme nombre, & determiner outre cela en combien de façons differentes chaque cube doit étre rangé, ce qui est, ce me semble, une des plus belles choses de l'Arihmetique, vous en trouverez un exemple sur le cube 64. à côté du quarré de 14.

Il faut ranger les 4. quarrez qui font la solidité du cube, en telle façon que le 1. soit dessous, & le second soit mis sur le premier, en telle façon que 53. soit sur 4. & 56. sur 1. Il faut ensuite mettre le 3. sur le 2. en telle façon que 60. soit sur 53. & 57. sur 56. & enfin il faut mettre le 4. sur le 3. en sorte que 13. soit sur 60. & 16. sur 57. Cela étant fait vous aurés un cube qui sera divisé en 12. quarrez, lesquels se trouveront tous disposez aux conditions requises, & il y aura en tout 72. lignes differentes, desquelles chacune faira une méme somme, sçavoir 130.

Vous voyez combien cecy est au dessus du Tetraedre & de l'Hexagone de Monsieur Frenicle, desquels le premier n'est pas solide en effet, mais par fiction seulement, quoy que je ne doûte pas qu'il ne puisse étre haussé en solide: mais dans ces deux propositions il y a beaucoup de nombres superflus dans les entre-deux des lignes qui aboutissent ou au sommet ou au centre, ce qui fait qu'elles ne sont pas si parfaites que la mienne en laquelle je puis encore ôter les enceintes requises & faire que le restant demeure aussi cube, &c. Je soûmets pourtant le tout a mondit Sieur de Frenicle, & crois que si j'avois l'honneur d'étre connu de luy, il auroit obmis quelques paroles qui sont dans sa Lettre. Je ne resteray pas de luy asseurer l'estime que je fais de luy, & de le conjurer de me faire part de sa methode. Pour le solide de la roulette, je le reduirois bien à des solides plus simples, mais à des Sphæres, cones, ou cylindres qui soint creés par des lignes droites données, il me semble qu'il est impossible: excusez si le papier me manque, &c.

Depuis ma Lettre écrite un de mes vieux papiers m'eût tombé en main, lequel contient une observation sur le probleme 21. du Livre de Bachet imprimé à Lyon 1624. & qui porte pour titre, Problemes plaisans & delectables qui se font par les nombres.

Voyés l'endroit où il propose de ranger en quarré les nombres consecutifs en progression Arithmetique, en sorte que tous les rangs tant de haut en bas, qu'à côté & par les diametres fassent une méme somme, dequoy il baille une regle generale pour les quarrez impairs, & avoüe n'en avoir peu trouver aucune pour les pairs, mais avoir seulement fait plusieurs observations particulieres par le moyen desquelles il a rangé les pairs jusques à 144.

Or pour la regle des quarrez impairs, je dis premierement qu'elle n'est pas de son invention, car elle est dans l'Arithmetique de Cardan, mais d'ailleurs elle ne resout la

question que d'une seule façon qui le peut étre en plusieurs. Je dis donc que ma methode range les quarrez pairs, & impairs à l'infiny.

2. Qu'elle les range en toutes les façons possibles, lesquelles augmentent comme les combinaisons à mesure que les quarrez sont plus grands.

3. Que la regle des pairement, impairs n'est pas differente de celle des pairement pairs, mais bien la méme, quoy que Bachet aye creu qu'elle devoit étre differente.

Voicy un exemple de ma methode.

Il range le 25. d'une seule façon, n'y sçachant autre chose, & voyez comme il le range.

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

En voicy 3. autres que j'ay choisi parmi plusieurs que ma methode enseigne.

11	22	9	20	3
2	14	25	8	16
19	5	13	21	7
10	18	1	12	24
23	6	17	4	15

11	24	17	10	3
4	12	25	18	6
7	5	13	21	19
20	8	1	14	22
23	16	9	2	15

12	25	6	19	3
5	11	24	8	17
16	4	13	22	10
9	18	2	15	21
23	7	20	1	14

Il range le 36. à tâtons d'une seule façon, comme s'ensuit.

6	32	3	34	35	1
7	11	27	28	8	30
19	14	16	15	23	24
18	20	22	21	17	13
25	29	10	9	26	12
36	5	33	4	2	31

En voicy un autre parmi plusieurs que ma methode fournit, si le temps ne me manquoit je vous en envoyerois demi douzaine.

5	31	4	33	36	2
14	18	22	21	13	23
26	7	9	10	30	29
11	25	27	28	12	8
20	24	15	16	19	17
35	6	34	3	1	32

Mais parce qu on pourroit croire que la regle n'a qu'un seul exemple lors que les diametraux demeurent les mémes. Voicy qui fait voir le contraire. C'est un exemple de ma methode du 64. different de celuy de Bachet, & qui garde pourtant les diametraux.

1	7	6	60	61	59	58	8
16	10	51	52	53	54	15	9
17	47	19	45	44	22	18	48
40	34	38	28	29	27	31	33
32	26	30	36	37	35	39	25
41	23	43	21	20	46	42	24
56	50	11	13	12	14	55	49
57	63	62	5	4	3	2	64

En voilà assés pour donner de l'exercice à Monsieur de Frenicle, car je ne sçay gueres rien de plus beau en l'Arithmetique que ces nombres que quelques uns appellent Planetarios, & les autres Magicos ; & de fait j'ay veu plusieurs Talismans ou quelques-uns de ces quarrez rangez de la sorte sont décrits,& parmy plusieurs un grand d'argent, qui contient le 49. rangé selon la methode de Bachet, ce qui fait croire que personne n'a encore connu la generale ny le nombre des solutions qui peuvent arriver à chaque quarré ; si la chose est sceuë à Paris, vous m'en éclaircirez, en tout cas je ne la dois qu'à moy seul. Je suis, &c.

Lettre de Monsieur de Fermat au Reverend Pere Mersenne de l'Ordre des Minimes. A Paris.

MON REVEREND PERE,

J'ay receu avec grande satisfaction vôtre Lettre accompagnée de celle de Monsieur Frenicle, qui me confirme en l'estime que je faisois de luy. J'y répons succinctement, & premierement sur ce qu'il a doûté que j'eusse une methode generale pour ranger tous les quarrez pairs à l'infiny,je vous prie de l'assurer du contraire,car il est tres-certain qu'il y a plus de 10. ans que je la découvris, & en donnay dés lors des exemples sur des quarrez plus hauts que ceux de Bachet comme Mr. Despagnet vous pourroit témoigner. Il est vray que je n'avois pas songé de determiner exactement en combien de façons ces quarrez pouvoient étre ordonnez, & j'avoüe que je n'avois pas veu toutes les manieres qui y conduisent, puisque je doûtois méme que le quarré peut demeurer Magique en levant une seule enceinte, mais ayant trouvé une regle pour les ordonner en beaucoup de façons, je creus qu'elle les contenoit toutes, ce qui me semble excusable, puisque je vous envoyay ma Lettre aussi-tôt aprés la premiere meditation que j'eus fait sur ce sujet. Depuis que j'ay receu la derniere de Monsieur Frenicle, j'ay aussi-tôt découvert que la question du quarré 22. étoit de ma portée, & pour ce que l'operation seroit trop longue qui consiste à ranger le quarré de 22. en telle sorte que levant 3. enceintes il reste Magique, & du restant encore 2. & qu'il demeure Magique, & puis une seule du reste à la méme condition, je me contenteray pour ce coup de vous envoyer le quarré qui reste aprés les trois premieres, & les 2. secondes enceintes ôtées, duquel si vous levez une seule enceinte le reste demeure Magique comme vous verrez.

127	126	125	361	362	363	364	365	366	118	117	116
347	148	338	339	145	143	342	142	344	345	139	138
325	161	169	168	318	319	320	321	163	162	324	160
292	293	191	190	299	298	297	186	185	184	302	193
270	280	272	273	211	210	209	208	278	279	205	215
248	227	250	251	230	232	231	233	256	257	258	237
226	249	228	229	252	254	253	2 55	234	235	236	259
204	214	206	207	277	276	275	274	212	213	271	281
182	192	301	003	189	188	187	296	295	294	183	303
171	315	323	223	164	165	166	167	317	316	170	314
149	346	147	146	340	341	144	343	141	140	337	336
369	359	360	124	123	122	121	120	109	367	368	358

Parce que le temps me manque je differe à vous envoyer les 5. enceintes qui manquent pour parfaire le quarré entier de 22. jusques au départ du prochain Courrier.

Aprés

Aprés cela vous devés croire que dés que j'auray loisir, j'iray aussi avant sur ce sujet qu'il est possible.

Pource qui est des cubes, je n'en sçay pas plus que Monsieur Frenicle, mais pourtant je puis les ranger tous à la charge que les Diagonales seules de quarrez que nous pouvons supposer paralleles à l'Horison, seront égales aux côtez des quarrez, ce qui n'est pas peu de chose. En attendant qu'une plus longue meditation découvre le reste, je dresseray celuy de 8. 10. ou 12. à ces conditions si Monsieur de Frenicle me l'ordonne.

Pour les quarrez qui ont des cellules vuides j'y travailleray au plûtôt.

Ce que j'estime le plus est cét abbregé pour l'invention des nombres parfaits, à quoy je suis resolu de m'attacher, si Monsieur Frenicle ne me fait part de sa methode. Voicy trois propositions que j'ay trouvées, sur lesquelles j'espere de faire un grand bastiment.

Les nombres moindres de l'unité que ceux qui procedent de la progression double, comme

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023
11	12	13	2047	4095	8191	&c.			

Soient appellez les nombres parfaits, parceque toutes les fois qu'ils sont premiers ils les produisent. Mettez au dessus de ces nombres, autant en progression naturelle 1. a. 3. &c. qui soient appellez leurs exposans.

Cela supposé, je dis,

1. Que lors que l'exposant d'un nombre radical est composé, son radical est aussi composé, comme parceque 6. exposant de 63. est composé, je dis que 63. est aussi composé.

2. Lors que l'exposant est nombre premier, je dis que son radical moins l'unité est mesuré par le double de l'exposant, comme parceque 7. exposant de 127. est nombre premier, je dis que 126. est multiple de 14.

3. Lors que l'exposant est nombre premier, je dis que son radical ne peut étre mesuré par aucun nombre premier que par ceux qui sont plus grands de l'unité qu'un multiple du double de l'exposant, ou que le double de l'exposant. Comme parce que 11. exposant de 2047. est nombre premier, je dis qu'il ne peut étre mesuré que par un nombre plus grand de l'unité que 22. comme 23. ou bien par un nombre plus grand de l'unité qu'un multiple de 22. en effet 2047. n'est mesuré que par 23. & par 89. duquel si vous ôtez l'unité, reste 88. multiple de 22.

Voilà trois fort belles propositions que j'ay trouvées & prouvées non sans peine. Je les puis appeller les fondements de l'invention des nombres parfaits. Je ne doute pas que Monsieur Freniele ne soit allé plus avant, mais je ne fais que commencer, & sans doute ces propositions passeront pour tres-belles daus l'esprit de ceux qui n'ont pas beaucoup épluché ces matieres, & je seray bien aise d'apprendre le sentiment de Monsieur de Roberval.

Au reste vous ou moy avons equivoqué de quelques characteres au nombre que j'avois creu parfait, ce que vous connoistrez aisement, puisque je vous baillois 137438953471. pour son radical, lequel j'ay pourtant depuis trouvé par l'Abbregé tiré de ma 3. proposition estre divisible par 223. ce que j'ay connu à la seconde division que j'ay faite, car l'exposant dudit radical estant 37. duquel le double est 74. j'ay commencé mes divisions par 149. plus grand de l'unité que le double de 74. puis continüuant par 223. plus grand de l'unité que le triple de 74. j'ay trouvé que ledit radical est multiple de 223.

De ces Abbregez j'en vois déja naître un grand nombre d'antres, *Et mi par di veder un gran lume.*

Je vons entretiendray un jour de mon progrez si Monsient de Frenicle ne vient au secours, & n'abbrege par ce moyen ma recherche des Abbregez, en tout cas je vous conjure de faire en sorte que Mr. de Roberval joigne son travail au mien, puisque je

Z

me trouve pressé de beaucoup d'occupations qui ne me laissent que fort peu de temps à vacquer à ces choses, je suis, &c.

Lettre de Monsieur de Fermat à Monsieur de Carcavi Conseiller au Grand Conseil. A Paris.

MONSIEUR,

Vous m'obligez toûjours, & je connois dans la continuation de vos soins celle de vôtre affection, dequoy je vous rends mille graces. Pour la Geometrie je n'ose pas encore m'y attacher fortement depuis mon incommodité, je n'auray pourtant pas beaucoup de peine à trouver les deux de vos propositions; pour celle de la parabole, je ne l'ay pas examinée ny tentée, je remets tout cecy à ma premiere commodité. Mais de peur que vous ne m'accusiez de n'envoyer rien de mon invention, je vous envoye trois nombres parmy plusieurs autres que j'ay trouvés dont les parties aliquotes font le multiple.

Le nombre suivant est sous-triple de ses parties aliquotes, 1494212327664192o.

Celuy-cy est sous-quadruple, 1802582780370364661760.

Et celuy-cy aussi, 87934476737668055040.

Puisque je me trouve sur cette matiere, en voicy deux que j'ay choisis parmy mes sous-quintuples.

Le premier se produit des nombres suivans multipliez entr'eux, 8388608. 2801. 2401. 2197. 2187. 1331. 467. 307. 289. 241. 125. 61. 41. 31.

Et l'autre se produit des nombres suivans multipliez entr'eux. 134217728. 243. 169. 127. 125. 113. 61. 43. 31. 29. 19. 11. 7.

En voicy encore un sous-double de ses parties de mon invention, lequel multiplié par 3. fait un sous-triple, ledit nombre est, 51001180160.

C'est parmy quantité d'autres que j'ay trouvez que j'ay choisi par advance ceux-cy pour vous en faire part, afin que vous en puissiés juger par cét échantillon. J'ay trouvé la methode generale pour trouver tous les possibles, dequoy je suis assuré que Monsieur de Roberval sera étonné, & le bon Pere Mersenne aussi, car il n'y a certainement quoy que ce soit dans toutes les Mathematiques plus difficile que cecy, & hors Monsieur de Frenicle, & peut-être Monsieur Descartes, je doute que personne en connoisse le secret, qui pourtant ne le sera pas pour vous, non plus que mille autres inventions, dont je pourray vous entretenir une autrefois, & pour exciter par mon exemple les Sçavans du Païs où vous estez, je leur propose de trouver autant de triangles en nombres qu'on voudra, de méme aire, ce que Diophante ny Viete n'ont trouvé que pour trois seulement. Je suis, &c.

Lettre de Monsieur de Fermat à Monsieur de Carcavi Conseiller au Grand Conseil. A Paris.

MONSIEUR,

Je suis marry de la perte du paquet de Monsieur de S. Martin, je luy écrivois sur le

sujet des nombres, & luy faisois part de quelques propositions, & sur tout de la suivante que Monsieur Frenicle m'avoit autrefois proposée, & qu'il m'advoüa tout net ne sçavoir point. Trouver un triangle rectangle, auquel le quarré de la difference des deux moindres côtez surpasse le double du quarré du plus petit côté d'un nombre quarré. Je luy advoüay aussi pour lors que je n'en sçavois point la solution, & que je ne voyois pas méme de voye pour y venir, mais depuis je l'ay trouvée avec autres infinies, voicy le triangle 156. 1617. 1525. Il sert à la suivante question pour laquelle Monsieur Frenicle se metoit en peine de ce prealable. Trouver un triangle rectangle duquel le plus grand côté soit quarré, & le plus petit differe d'un quarré de chacun des deux autres. Si vous jugez à propos de faire part de cette proposition à mondit sieur de S. Martin, je m'en remets à vous, je ne resteray pas de luy récrire par la premiere voye.

J'ay donné à Monsieur l'Archevéque un petit memoire de corrections sur le Theon Smyrnæus, que je croy qu'il envoyera à l'Autheur avec le manuscrit de l'Astronomie. Je seray ravy que cette occasion me serve à étre connu de Monsieur Bulliaud de qui le merite étant connu à tout le monde m'a esté pleinement confirmé par ce nouveau travail sur le Theon, où j'ay particulierement admiré la correction du Decret de Timothée, qui ne pouvoit étre deüe qu'à une main de cette importance. Je suis, &c.

Lettre de Monsieur Pascal à M. de Fermat.

Le 29. Iuillet 1654.

MONSIEUR,

L'impatience me prend aussi-bien qu'à vous, & quoy que je sois encore au lit, je ne puis m'empécher de vous dire que je receus hier au soir de la part de Mr. de Carcavi vôtre lettre sur les partis, que j'admire si fort que je ne puis vous le dire. Je n'ay pas le loisir de m'étendre, mais en un mot vous avez trouvé les deux partis des dez & des parties dans la parfaite justesse, j'en suis tout satisfait, car je ne doute plus maintenant que je ne sois dans la verité, apres la rencontre admirable où je me trouve avec vous; j'admire bien davantage la methode des parties que celle des dez. J'avois veu plusieurs personnes trouver celles des dez, comme Mr. le Chevalier de Meré, qui est celuy qui m'a proposé ces questions, & aussi Monsieur de Roberval, mais Mr. de Meré n'avoit jamais pû trouver la juste valeur des parties ny de biais pour y arriver, de sorte que je me trouvois seul qui eusse connu cette proportion. Vôtre methode est tres-seure, & est celle qui m'est la premiere venüe à la pensée dans cette recherche. Mais parce que la peine des combinaisons est excessive, j'en ay trouvé un Abbregé, & proprement une autre methode bien plus courte & plus nette que je voudrois vous pouvoir dire icy en peu de mots. Car je voudrois desormais vous ouvrir mon cœur s'il se pouvoit, tant j'ay de joye de voir nôtre rencontre. Je voy bien que la verité est la méme à Tolose & à Paris. Voicy à peu prés comme je fais pour sçavoir la valeur de chacune des parties, quand deux joüeurs joüent par exemple en trois parties, & chacun a mis 32. pistoles au jeu.

Posons que le premier en ait deux & l'autre une, ils joüent maintenant une partie, dont le sort est tel, que si le premier la gagne, il gagne tout l'argent qui est au jeu, sçavoir 64 pistoles; si l'autre la gagne, ils sont deux parties à deux parties; & par consequent s'ils veulent se separer, il faut qu'ils retirent chacun leur mise, sçavoir chacun 32. pistoles. Considerez donc, Monsieur, que si le premier gagne il luy appartient 64. s'il perd il luy appartient 32. Donc s'ils veulent ne point hazarder cette partie, & se separer sans la joüer, le premier doit dire, je suis seur d'avoir 32. pistoles, car la perte

méme me les donne, mais pour les 32. autres, peut-être je les auray, peut-être vous les aurez, le hazard est égal, partageons donc ces 32 pistoles par la moitié, & me donnez outre cela mes 32. qui me sont seures, il aura donc 48. pistoles & l'autre 16.

Posons maintenant que le premier ait deux parties, & l'autre point, & ils commencent a joüer une partie, le sort de cettte partie est tel, que si le premier la gagne il tire tout l'argent, 64. pistoles, si l'autre la gagne les voilà revenus au cas precedent, auquel le premier aura deux parties, & l'autre une. Or nous avons déja monstré qu'en ce cas il appartient à celuy qui a les deux parties 48. pistoles, donc s'ils veulent ne point jouer cette partie, il doit dire ainsi, si je la gagne, je gagneray tout, qui est 64. si je la perds, il m'appartiendra legitimement 48. Donc donnez-moy les 48. qui me sont certaines, au cas méme que je perde, & partageons les 16. autres par la moitié, puis qu'il y a autant de hazard que vous les gagnez comme moy, ainsi il aura 48 & 8, qui font 56. pistoles.

Posons enfin que le premier n'ait qu'une partie & l'autre point.

Vous voyez, Monsieur, que s'ils commencent une partie nouvelle, le sort en est tel, que si le premier la gagne, il aura deux parties à point, & partant par le cas precedent il luy appartient 56. s'il la perd ils sont partie à partie, donc il luy appartient 32 pistoles. Donc il doit dire si vous voulez ne la pas joüer donnez-moy 32. pistoles qui me sont seures, & partageons le reste de 56. par la moitié, de 56. ôtez 32. reste 24. partagez donc 24. par la moitié prenez en 12. & moy 12. qui avec 32. font 44.

Or parce moyen vous voyez par les simples soustractions que pour la premiere partie il appartient sur l'argent de l'autre 12. pistoles, pour la seconde autres 12. & pour la derniere 8.

Or pour ne plus faire de mystere, puisque vous voyez aussi bien tout à découvert, & que je n'en faisois que pour voir si je ne me trompois pas, la valeur (j'entens sa valeur sur l'argent de l'autre seulement) de la derniere partie de deux, est double de la partie de 3. & quadruple de la derniere partie de 4. & octuple de la derniere partie de 5. &c.

Mais la proportion des premieres parties n'est pas si aisée a trouver, elle est donc ainsi, car je ne veux rien déguiser. Et voicy le probleme dont je faisois tant de cas, comme en effet il me plaît fort.

Estant donné tel nombre de parties qu'on voudra trouver la valeur de la premiere.

Soit le nombre des parties donné par exemple 8. prenez les huit premiers nombres pairs, & les huit premiers nombres impairs, sçavoir 2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16.

Et 1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. multipliés les nombres pairs en cette sorte le premier par le second, le produit par le troisiéme, le produit par le 4. le produit par le cinquiéme, &c. Multipliez les nombres impairs de la méme sorte, le premier par le second, le produit par le troisiéme, &c. le dernier produit des pairs est le denominateur, & le dernier produit des impairs est le numerateur de la fraction qui exprime la valeur de la premiere partie de 8. C'est à dire que si on joüe chacun le nombre des pistolles exprimé par le produit des pairs, il en appartiendroit sur l'argent de l'autre le nombre exprimé par le produit des impairs.

Ce qui se demonstre, mais avec beaucoup de peine par les combinaisons telles que vous les avez imaginées, & je n'ay peu les demonstrer par cette autre voye que je viens de vous dire, mais seulement par celle des combinaisons, & voicy les propositions qui y menent, qui sont proprement des propositions arithmetiques touchant les combinaisons, dont j'ay d'assez belles proprietez.

Si d'un nombre quelconque de Lettres, par exemple de 8. A, B, C, D, E, F, G, H, vous en prenez toutes les combinaisons possibles de 4. lettres, & en suite toutes les combinaisons possibles de 5. lettres, & puis de 6. de 7. & de 8. &c. & qu'ainsi vous preniez toutes les combinaisons possibles depuis la multitude qui est la moitié de la toute jusqu'au tout, je dis que si vous joignez ensemble la moitié de la combinaison de 4. avec

chacune des combinaisons superieures, la somme sera le nombre tantiéme de la progression quaternaire à commencer par le binaire qui est la moitié de la multitude.

Par exemple, & je vous le diray en Latin, car le François n'y vaut rien. Si quotlibet litterarum verbi gratia octo A B C D E F G H, sumantur omnes combinationes quaternarij, quinquenarij, senarij, &c. usque ad octonarium. Dico si jungas dimidium combinationis quaternarij nempe 35. (dimidium 70.) cum omnibus combinationibus quinquenarij nempe 56. plus omnibus combinationibus senarij nempe 28. plus omnibus combinationibus septenarij nempe 8. plus omnibus combinationibus octonarij nempè 1. factum esse quartum numerum progressionis quaternarij cujus origo est 2. dico quartum numerum, quia 4. octonarij dimidium est.

Sunt enim numeri progressionis quaternarij quibus origo est 2. isti, 2. 8. 32. 128. 512. &c. quorum 2. primus est, 8. secundus, 32. tertius, & 128. quartus, cui 128. æquantur + 35. dimidium combinationis 4. litterarum, + 56. combinationis 5. litteratum, + 28 combinationis 6. litterarum, + 8 combinationis 7. litterarum, + 1 combinationis 8. litterarum.

Voila la premiere proposition qui est purement Arithmetique.

L'autre regarde la doctrine des partis, & est telle : il faut dire auparavant si on a une partie de 5. par exemple, & qu'ainsi il en manque 4. le jeu sera infailliblement decidé en 8. qui est double de 4. la valeur de la premiere partie de 5. sur l'argent de l'autre est la fraction qui a pour numerateur la moitié de la combinaison de 4. sur 8. (je prens 4. parce qu'il est égal au nombre des parties qui manque, & 8. parce qu'il est double de 4.) & pour denominateur ce méme numerateur, plus toutes les combinaisons superieures.

Ainsi si j'ay une partie de 5. il m'apartient sur l'argent de mon joüeur, $\frac{35}{128}$. c'est à dire que s'il a mis 128 pistoles, j'en prens 35. & luy laisse le reste 93. Or cette fraction $\frac{35}{128}$ est la méme que celle-là $\frac{105}{384}$ laquelle est faite par la multiplication des pairs pour denominateur & de la multiplication des impairs pour le numerateur.

Vous verrez bien sans doûte tout cela si vous vous en donnez tant soit peu la peine. C'est pourquoy je trouve inutile de vous en entretenir davantage, je vous envoye neantmoins une de mes vieilles tables.

Je n'ay pas le loisir de la copier, je la referay, vous y verrez comme toûjours la valeur de la premiere partie est égale à celle de la seconde, ce qui se trouve aisement par les combinaisons.

Vous verrez de méme que les nombres de la premiere ligne augmentent toûjours.

Ceux de la seconde de méme.

Ceux de la troisiéme de méme.

Mais en suite ceux de la 4. diminüent.

Ceux de la 5. &c.

Ce qui est étrange.

Je n'ay pas le temps de vous envoyer la demonstration d'une difficulté qui étonoit fort M...... car il a tres-bon esprit, mais il n'est pas Geometre. C'est comme vous sçavez un grand defaut, & méme il ne comprend pas qu'une ligne Mathematique soit divisible à l'infiny, & croit fort bien entendre qu'elle est composée de points en nombre finy, & jamais je n'ay peu l'en tirer, si vous le pouviez faire on le tendroit parfait.

Il me disoit donc qu'il avoit trouvé fausseté dans les nombres par cette raison.

Si on entreprend de faire un six avec un dé il y a advantage de l'entreprendre en 4. comme de 671. à 625.

Si on entreprend de faire Sannes avec deux dez il y a desadvantage de l'entreprendre en 24.

Et neantmoins 24. est à 36. (qui est le nombre des faces de deux dez) comme 4. à 6. (qui est le nombre des faces d'un dé.)

Voila quel étoit son grand scandale qui luy faisoit dire hautement que les propositions n'étoient pas constantes, & que l'Arithmetique se démentoit.

Mais vous en verrez bien aisement la raison par les principes où vous estés.

Je mettray par ordre tout ce que j'en ay fait quand j'auray achevé des traitez Geometriques où je travaille il y a déja quelque temps.

J'en ay fait aussi d'Arithmetiques, sur le sujet desquels je vous supplie de me mander vôtre avis sur cette démonstration.

Je pose le Lemme que tout le monde sçait, que la somme de tant de nombres qu'on voudra de la progression continüée depuis l'unité comme 1. 2. 3.4. étant prise deux fois est égale au dernier 4. menée dans le prochainement plus grand 5. c'est à dire que la somme des nombres contenus dans A, étant prise deux fois est égale au produit de A in $A + 1$.

Maintenant je viens à ma prôposition.

Duorum quorumlibet cuborum proximorum differentia unitate demptâ sextupla est omnium numerorum in minoris radice contentorum. Sint duæ radices R, S, unitate differentes, dico $R^3 - S^3 - 1$. æq. summæ numerorum in S contentorum sexies sumptæ: etenim S vocetur A, ergo R est $A + 1$. Igitur cubus radicis R, seu $A + 1$ est $A^3 + 3 A^2 + 3 A + 1^3$. Cubus vero S seu A est A^3. Et horum differentia est $3 A^2 + 3 A + 1^3$. id est $R^3 - S^3$. Igitur si auferatur unitas, $3 A^2 + 3 A$ æq. $R^3 - S^3 - 1$, sed duplum summæ numerorum in A seu S contentorum æquatur ex lemmate A in $A + 1$ hoc est $A^2 + A$. Igitur sextuplum summæ numerorum in A contentorum æq. $3 A^2 + 3 A$. Sed $3 A^2 + 3 A$ æq. $R 3 - S^3 - 1$. Igitur $R^3 - S^3 - 1$ æq. sextuplo summæ numerorum in A seu S contentorum : quod erat demonstrandum.

On ne m'a pas fait de difficulté là dessus, mais on m'a dit qu'on ne m'en faisoit pas par cette raison que tout le monde est accoûtumé aujourd'huy à cette methode, & moy je pretends que sans me faire grace on doit admettre cette demonstration comme d'un genre excellent, j'en attens neantmoins vôtre avis avec toute soumission : tout ce que j'ay demontré en Arithmetique est de cette nature, voicy encore deux difficultez.

J'ay demontré une proposition plane en me servant du cube d'une ligne comparé au cube d'une autre.

Je pretens que cela est purement Geometrique & dans la severité la plus grande.

De méme j'ay resolu le probleme de quatre plans, quatre points & quatre Sphæres, quatre quelconque étant donnez trouver une Sphære, qui touchant les Sphæres données passe par les points donnez, & laisse sur les plans des portions de Sphæres capables d'angles donnez, & celuy-cy.

De trois cercles, trois points, trois lignes quelconques étant donnez trouver un cercle qui touchant les cercles, & les points, laisse sur la ligne un arc capable d'angle donné. J'ay resolu ces problemes plainement n'employant dans la construction que des cercles & des lignes droites.

Mais dans la demonstration je me sers de lieux solides de paraboles ou hyperboles.

Je pretens neantmoins qu'attendu que la construction est plane ma solution est plane, & doit passer pour telle.

C'est bien mal reconnoître l'honneur que vous me faites de souffrir mes entretiens, que de vous importuner si long-temps, je ne pense jamais vous dire que deux mots, & si je ne vous dis pas ce que j'ay le plus sur le cœur, qui est que plus je vous connois plus je vous admire & vous honnore, & que si vous voyez à quel point cela est, vous donneriez une place dans vôtre amitié à celuy qui est, &c.

Table dont il est fait mention dans la Lettre precedente.

Si on joüe chacun 256.

EN

Il m'appartient sur les 256. pistoles de mon joüeur pour la

	6. Parties.	5. Parties.	4. Parties.	3. Parties.	2. Parties.	1. Partie.
1. Partie.	63.	70.	80.	96.	128.	256.
2. Partie.	63.	70.	80.	96.	128.	
3. Partie.	56.	60.	64.	64.		
4. Partie.	42.	40.	32.			
5. Partie.	24.	16.				
6. Partie.	8.					

Si on joüe 256. chacun

EN

Il m'appartient sur les 256. de mon joüeur pour

	6. Parties.	5. Parties.	4. Parties.	3. Parties.	2. Parties.	1. Partie
La 1. Partie.	63.	70.	80.	96.	128.	256.
Les 2. premieres parties.	126.	140.	160.	192.	256.	
Les 3. premieres parties.	182.	200.	224.	256.		
Les 4. premieres parties.	224.	240.	256.			
Les 5. premieres parties.	248.	256.				
Les 6. premieres parties.	256.					

Lettre de Monsieur Pascal à M. de Fermat.

Du 24. Aoust 1654.

MONSIEUR,

Je ne peus vous ouvrir ma pensée entiere touchant les partis de plusieurs joüeurs par l'Ordinaire passé, & mémes j'ay quelque repugnance à le faire, de peur qu'en cecy cette admirable convenance qui étoit entre nous, & qui m'étoit si chere ne commence à se démentir, car je crains que nous ne soyons de differens avis sur ce sujet. Je vous veus ouvrir toutes mes raisons, & vous me ferez la grace de me redresser si j'erre, ou de m'affermir si j'ay bien rencontré. Je vous le demande tout de bon & sincerement, car je ne me tiendray pour certain que quand vous serés de mon côté.

Quand il n'y a que deux joüeurs vôtre methode qui procede par les combinaisons est tres-seure. Mais quand il y en a trois, je croy avoir demonstration qu'elle est mal juste, si ce n'est que vous y procediez de quelqu'autre maniere que je n'entens pas, mais la methode que je vous ay ouverte, & dont je me sers par tout est commune à toutes les conditions imaginables de toutes sortes de partis, au lieu que celle des combinaisons (dont je ne me sers qu'aux rencontres particulieres où elle est plus courte que la generale) n'est bonne qu'en ces seules occasions, & non pas aux autres.

Je suis seur que je me donneray à entendre, mais il me faudra un peu de discours, & à vous un peu de patience.

Voicy comment vous procedés quand il y a deux joüeurs.

Si deux joüeurs joüans en plusieurs parties se trouvent en cét état qu'il manque deux parties au premier, & trois au second, pour trouver le parti il faut (dites vous) voir en combien de parties le jeu sera décidé absolument.

aaaa	1
aaab	1
aaba	1
aabb	1
abaa	1
abab	1
abba	1
abbb	2
baaa	1
baab	1
baba	2
babb	2
bbaa	
bbab	2
bbba	2
bbbb	2

Il est aisé de supputer que ce sera en quatre parties, d'où vous conclüez qu'il faut voir combien quatre parties se combinent entre deux joüeurs, & voir combien il y a de combinaisons pour faire gagner le premier, & combien pour le second, & partager l'argent suivant cette proportion. J'eusse eu peine à entendre ce discours là si je ne l'eusse sceu de moy méme auparavant, aussi vous l'aviez écrit dans cette pensée. Donc pour voir combien quatre parties se combinent entre deux joüeurs, il faut imaginer qu'ils joüent avec un dé à deux faces (puis qu'ils ne sont que deux joüeurs) comme à croix & pile, & qu'ils jettent quatre de ces dez (parce qu'ils joüent en quatre parties) & maintenant il faut voir combien ces dez peuvent avoir d'assietes differentes. Cela est aisé à supputer, ils en peuvent avoir seize qui est le second degré de quatre, c'est à dire le quarré; Car figurons nous qu'une des faces est marquée A, favorable au premier joüeur, & l'autre B favorable au second, donc ces quatre dez peuvent s'asseoir sur une de ces seize assietes,

aaaa
bbbb.

Et parce qu'il manque deux parties au premier joüeur, toutes les faces qui ont deux A le font gagner, donc il en a 11. pour luy, & parce qu'il y manque trois parties au second, toutes les faces où il y a 3. B le peuvent faire gagner, donc il y en a 5.

Donc il faut qu'ils partagent la somme comme 11. à 5. Voilà vôtre methode quand

il y

il y a deux joüeurs. Sur quoy vous dites que s'il y en a davantage il ne sera pas difficile de faire les partys par la méme methode.

Sur cela, Monsieur, j'ay à vous dire que ce party pour deux joüeurs fondé sur les combinaisons est tres-juste & tres-bon. Mais que s'il y a plus de deux joüeurs il ne sera pas toûjours juste, & je vous diray la raison de cette difference.

Je communiquay vôtre methode à nos Messieurs, sur quoy Monsieur de Roberval me fit cette objection.

Que c'est à tort que l'on prend l'art de faire le party sur la supposition qu'on joüe en 4. parties, veu que quand il manque 2. parties a l'un & 3. à l'autre, il n'est pas de necessité que l'on joüe 4. parties pouvant arriver qu'on n'en jouera que deux ou 3. ou à la verité peut-étre 4.

Et ainsi qu'il ne voyoit pas pourquoy on pretendoit de faire le party juste sur une condition feinte qu'on joüera 4. parties, veu que la condition naturelle du jeu, est qu'on ne joüera plus dés que l'un des joüeurs aura gagné, & qu au moins si cela n'étoit faux, cela n'étoit pas demonstré.

De sorte qu'il avoit quelque soupçon que nous avions fait un paralogisme, je luy répondis que je ne me fondois pas tant sur cette methode des combinaisons, laquelle veritablement n'est pas en son lieu en cette occasion, comme sur mon autre methode universelle à qui rien n'échape, & qui porte sa demonstration avec soy, qui trouve le méme party precisement que celle des combinaisons, & de plus je luy demonstray la verité du party entre deux joüeurs par les combinaisons en cette sorte.

N'est-il pas vray que si deux joüeurs se trouvans en cét état de l'hypotese qu'il manque deux parties à l'un & 3. à l'autre conviennent maintenant de gré à gré qu'on joüe quatre parties complettes, c'est à dire qu'on jette les quatre dez à deux faces tous à la fois, n'est-il pas vray, dis-je, que s'ils ont déliberé de joüer les quatre parties le party doit étre tel que nous avons dit suivant la multitude des assietes favorables à chacun.

Il en demeura d'acord, & cela en effet est demonstratif, mais il nyoit que la méme chose subsistat en ne s'astreignant pas à joüer les 4. parties, je luy dis donc ainsi.

N'est-il pas clair, que les mémes joüeurs n'étant pas astreints à joüer quatre parties, mais voulant quitter le jeu dés que l'un auroit atteint son nombre, peuvent sans dommage ny advantage s'astreindre à joüer les quatre parties entieres, & que cette convention ne change en aucune maniere leur condition. Car si le premier gagne les deux premieres parties de quatre, & qu'ainsi il ait gagné, refusera-il de joüer encore deux parties, veu que s'il les gagne il n'a pas mieux gagné, & s'il les perd il n'a pas moins gagné, car ces deux que l'autre a gagné ne luy suffisent pas, puis qu'il luy en faut trois, & aussi il n'y a pas assés de quatre parties pour faire qu'ils puissent tous deux atteindre le nombre qui leur manque.

Certainement il est aisé de considerer qu'il est absolument égal & indifferent à l'un & à l'autre de joüer en la condition naturelle à leur jeu qui est de finir dés qu'un aura son compte, ou de joüer les quatre parties entieres, donc puisque ces deux conditions sont égales & indifferentes le party doit étre tout pareil en l'une & en l'autre, or il est juste quand ils sont obligez de joüer 4. parties comme je l'ay monstré.

Donc il est juste aussi en l'autre cas. Voilà comment je le demonstray, & si vous y prenez garde cette demonstration est fondée sur l'égalité des deux conditions vraye & feinte à l'égard de deux joüeurs, & qu'en l'une & en l'autre un méme gagnera toûjours, & si l'un gagne ou perd en l'une, il gagnera ou perdra en l'autre, & jamais deux n'auront leur compte. Suivons la méme pointe pour trois joüeurs.

Et posons qu'il manque une partie au premier, qu'il en manque deux au second, & deux au troisiéme: pour faire le party suivant la méme methode des combinaisons il faut chercher d'abord en combien de parties le jeu sera decidé, comme nous avons

fait quand il y avoit deux joueurs, ce fera en 3. Car ils ne ſçauroint joüer 3. parties ſans que la decision ſoit arrivée neceſſairement.

Il faut voir maintenant combien 3. parties ſe combinent entre trois joüeurs, & combien il y en a de favorables à l'un, combien à l'autre, & combien au dernier, & ſuivant cette proportion diſtribuer l'argent de méme qu'on a fait en l'hypoteſe de deux joüeurs.

Pour voir combien il y a de combinaiſons en tout, cela eſt aiſé, c'eſt la troiſiéme puiſſance de 3. c'eſt à dire ſon cube 27.

Car ſi on jette trois dez à la fois (puis qu'il faut joüer trois parties) qui ayent chacun 3. faces, puis qu'il y a trois joüeurs, l'une marquée A favorable au premier, l'autre B pour le ſecond, l'autre C pour le troiſiéme.

Il eſt manifeſte que ces trois dez jettez enſemble peuvent s'aſſeoir ſur 27. aſſietes differentes, ſçavoir,

a a a	1		
a a b	1		
a a c	1		
a b a	1		
a b b	1	2	
a b c	1		
a c a	1		
a c b	1		
a c c	1		3
b a a	1		
b a b	1	2	
b a c	1		
b b a	1	2	
b b b		2	
b b c		2	
b c a	1		
b c b		2	
b c c			3
c a a	1		
c a b	1		
c a c	1		3
c b a	1		
c b b		2	
c b c			3
c c a	1		3
c c b			3
c c c			3

Or il ne manque qu'une partie au premier, donc toutes les aſſietes où il y a un A ſont pour luy, donc il y en a 19.

Il manque deux parties au ſecond, donc toutes les aſſietes où il y a 2. B ſont pour luy, donc il y en a 7.

Il manque deux parties au 3. donc toutes les aſſietes où il y a 2. C ſont pour luy, donc il y en a 7.

Si de là on concluoit qu'il faudroit donner à chacun ſuivant la proportion de 19. 7. 7. on ſe tromperoit trop groſſierement, & je n'ay garde de croire que vous le faſſiés ainſi. Car il y a quelques faces favorables au premier & au ſecond tout enſemble comme A B B, car le premier y trouve un A qu'il luy faut, & le ſecond deux B, qui luy manquent, & ainſi A C C eſt pour le premier & le troiſiéme.

Donc il ne faut pas compter ces faces qui ſont communes à deux comme valans la ſomme entiere à chacun, mais ſeulement la moitié.

Car s'il arrivoit l'aſſiete A C C, le premier, & le troiſiéme auroint méme droit à la ſomme ayant chacun leur compte, donc ils partageroient l'argent par la moitié, mais s'il arrive l'aſſiete A A B, le premier gagne ſeul, il faut donc faire la ſupputation ainſi.

Il y a 13. aſſietes qui donnent l'entier au premier, & 6. qui luy donnent la moitié, & huit qui ne luy valent rien.

Donc ſi la ſomme entiere eſt une piſtole.

Il y a 13. faces qui luy valent chacune 1. piſtole.

Il y a 6. faces qui luy valent chacune $\frac{1}{2}$ piſtole.

Et 8. qui ne valent rien.

Donc en cas de party il faut multiplier,

13.	Par une piſtole qui ſont.	13
6.	Par une demy qui ſont.	3
8.	Par zero, qui ſont.	0
Somme 27.		Somme 16

Et diviſer la ſomme des valeurs 16, par la ſomme des aſſietes 27. qui fait la fraction $\frac{16}{27}$ qui eſt ce qui appartient au premier en cas de partys, ſçavoir 16. piſtoles de 27.

Le party du ſecond & du troiſiéme joüeur ſe trouvera de méme.

Il y a 4. assietes qui luy valent 1. pistole, multipliés,	4.
Il y a 3. assietes qui luy valent $\frac{1}{2}$ pistoles, multipliés,	1. $\frac{1}{2}$
Et 20. assietes que ne luy valent rien.	0
Somme 27.	Somme 5 $\frac{1}{2}$

Donc il appartient au second joüeur 5. pistoles & $\frac{1}{2}$ sur 27. & autant au troisiéme, & ces trois sommes 5. $\frac{1}{2}$ 5. $\frac{1}{2}$ & 16. étant jointees font les 27.

Voilà, ce me semble, de quelle maniere il faudroit faire les partys par les combinaisons suivant vôtre methode, si ce n'est qui vous ayés quelqu'autre chose sur ce sujet que je ne puis sçavoir.

Mais si je ne me trompe ce party est mal juste.

La raison en est qu'on suppose une chose fausse, qui est qu'on joüe en 3. parties infailliblement, au lieu que la condition naturelle de ce jeu la est qu'on ne joüe que jusques à à ce qu'un des joüeurs ait atteint le nombre de parties qui luy manque, auquel cas le jeu cesse.

Ce n'est pas qu'il ne puisse arriver qu'on joüe 3. parties, mais il peut arriver aussi qu'on n'en joüera qu'une ou deux, & rien de necessité.

Mais d'où vient, dira t'on, qu'il n'est pas permis de faire en cette rencontre la méme supposition feinte que quand il y avoit deux joüeurs?

En voicy la raison.

Dans la condition veritable de ces trois joüeurs il n'y en a qu'un qui peut gagner: car la condition est que dés qu'un a gagné, le jeu cesse; mais en la condition feinte deux peuvent atteindre le nombre de leurs parties: sçavoir si le premier en gagne une qui luy manque, & un des autres deux qui luy manquent, car ils n'auront joüé que trois parties, au lieu que quand il n'y avoit que deux joüeurs la condition feinte & la veritable convenoint pour les avantages des joüeurs en tout, & c'est ce qui met l'extreme difference entre la condition feinte & la veritable.

Que si les joüeurs se trouvans en l'état de l'hypothese, c'est à dire s'il manque une partie au premier, & deux au second, & deux au troisiéme, veulent maintenant de gré à gré & convienent de cette condition, qu'on joüera trois parties complettes, & que ceux qui auront atteint le nombre qui leur manque prendront la somme entiere (s'ils se trouvent seuls qui l'ayent atteint) ou s'il se trouve que deux l'ayent atteint qu'ils la partageront également.

En ce cas le party se doit faire comme je viens de le donner, que le premier ait 16. le second, 5 $\frac{1}{2}$ le troisiéme, 5 $\frac{1}{2}$ de 27. pistoles, & cela porte sa demonstration de soy mémes en supposant cette condition ainsi.

Mais s'ils joüent simplement à condition non pas qu'on joüe necessairement 3. parties, mais seulement jusques à ce que l'un d'entr'eux ait atteint ses parties, & qu'alors le jeu cesse sans donner moyen à un autre d'y arriver, lors il appartient au premier 17. pistoles, au second 5. au troisiéme 5. de 27.

Et cela se trouve par ma methode generale qui determine aussi qu'en la condition precedente il en faut 16. au premier 5 $\frac{1}{2}$ au 2. & 5. $\frac{1}{2}$ au 3. sans se servir des combinaisons, car elle va par tout seule & sans obstacle.

Voilà, Monsieur, mes pensées sur ce sujet sur lequel je n'ay d'autre avantage sur vous que celuy d'y avoir beaucoup plus medité. Mais c'est peu de chose à vôtre égard, puisque vos premieres veuës sont plus penetrantes que la longueur de mes efforts.

Je ne laisse par de vous ouvrir mes raisons pour en attendre le jugement de vous. Je croy vous avoir fait connoître par là que la methode des combinaisons est bonne entre deux joüeurs par accident, comme elle est l'est aussi quelquefois entre trois

joüeurs, comme quand il manque une partie à l'un, une à l'autre, & deux à l'autre, parce qu'en ce cas le nombre des parties dans lesquelles le jeu fera achevé ne suffit pas pour en faire gagner deux, mais elle n'est pas generale, & n'est bonne generalement qu'au cas seulement qu'on soit astreint à joüer un certain nombre de parties exactement.

De sorte que comme vous n'aviés pas ma methode quand vous m'avés proposé le party de plusieurs joüeurs, mais seulement celle des combinaisons, je crains que nous soyons de sentimens differens sur ce sujet, je vous supplie de me mander de quelle sorte vous procedez en la recherche de ce party.

Je recevray vôtre réponse avec respect & avec joye, quand méme vôtre sentiment me seroit contraire, je suis, &c.

Lettre de Monsieur Pascal à M. de Fermat.

Du 27. Octobre 1654.

MONSIEUR,

Vôtre derniere Lettre m'a parfaitement satisfait, j'admire vôtre methode pour les partys, d'autant mieux que je l'entens fort bien, elle est entierement vôtre, & n'a rien de commun avec la mienne, & arrive au méme but facilement. Voilà nôtre intelligence rétablie, mais, Monsieur, si j'ay concouru avec vous en cela, cherchez ailleurs qui vous suive dans vos inventions numeriques dont vous m'avez fait la grace de m'envoyer les enonciations, pour moy je vous confesse que cela mè passe de bien loin, je ne suis capable que de les admirer, & vous supplie tres-humblement d'occuper vôtre premier loisir à les achever, tous nos Messieurs les virent Samedy dernier & les estimerent de tout leur cœur: on ne peut pas aisement supporter l'attente de choses si belles & si souhaitables, pensés y donc, s'il vous plaît, & assûrez vous que je suis, &c.

Problemata proposita à D. de Fermat.

PRoponatur (si placet) *Wallisio*, & reliquis Angliæ Mathematicis, sequens quæstio numerica.

Invenire Cubum, qui additus omnibus suis partibus aliquotis conficiat Quadratum. Exempli gratia. Numerus 343. est Cubus, à latere 7. Omnes ipsius partes aliquotæ sunt 1, 7, 49; quæ adjunctæ ipsi 343. conficiunt numerum 400, qui est quadratus à latere 20.

Quæritur alius cubus numerus ejusdem naturæ.

Quæritur etiam numerus Quadratus qui additus omnibus suis partibus aliquotis conficiat numerum Cubum.

Has solutiones expectamus; quas si Anglia aut Galliæ Belgica & Celtica non dederint, dabit Gallia Narbonensis, easque in pignus nascentis amicitiæ *D. Digby* offeret & dicabit.

Lettre de M. de Fermat à Monsieur le Chevalier Kenelme Digby.

Du 20. Avril 1657.

MONSIEUR,

Puis que vous voulés, que les complimens cessent, soit fait. Il me suffit de vous asseurer une fois pour toutes, que vous vous estes tres-justement acquis un pouvoir absolu sur moy, & que je ne perdray point d'occasion à vous le témoigner. J'ay leu l'*Arithmetique Infinitorum* de M. Uvallis, & j'en estime beaucop l'Autheur. Et bien que la quadrature tant des paraboles, que des hyperboles infinies ait esté faite par moy depuis fort longues années, & que j'en aye autresfois entretenu l'illustre Toricelli, je ne laisse pas d'estimer l'invention de M. Uvallis, qui sans doûte n'a pas sçeu, que j'eusse preoccupé son travail. Voicy une de mes propositions aux termes que je la conceus en l'envoyant à Toricelli. Soient les deux droites S K R, & K O F. Et soient descrites les courbes E G H Q d'un côté, & D A B C de l'autre, en forme d'hyperboles, dont les asymptotes soient les droites premierement données. Soient encore tirées A G, B H, paralleles à S K R, & les droites B N, A M, G L, H I, paralleles à K O F. En l'hyperbole ordinaire le rectangle N P est égal au rectangle M A O. Mais supposons maintenant, que le produit du quarré B N & de la droite B P, soit égal au produit du quarré M A & de la droite A O. En ce cas la courbe sera une nouvelle hyperbole, dont la proprieté sera, que le parallelogramme B I sera égal à l'espace compris soûs la base B H, & les deux courbes B A D F, F E G H qui vont à l'infini du côté F. Que si le produit du cube B N & de la droite B P, est égal au produit du cube A M & de la droite A O, en ce cas ce sera une autre hyperbole, dont la proprieté sera, que le parallelogramme B I sera double de l'espace compris sous la base B H & les deux courbes en montant, ut supra. Et par regle generale, Si le produit d'une puissance de B N par une puissance de B P, est égal au produit d'une pareille puissance de M A par une pareille de A O, en supposant celles de B N & M A pareilles entre elles, comme aussi celles de B P & de A O aussi pareilles, le parallelogramme B I sera à la figure prolongée à l'infini, ut supra, comme la difference de l'exposant de la puissance de B N avec l'exposant de la puissance de B P est à l'exposant de la puissance de B P. De sorte qu'il suit de là, qu'en l'hyperbole ordinaire, l'espace de la figure prolongée à l'infini n'est point égal à un espace donné, parce que l'exposant des puissances étant le méme ne donne aucune difference. Et pour faire que l'espace de ladite figure prolongée à l'infini soit égal à un espace donné, il faut que l'exposant de B N soit plus grand que celuy de B P, comme il est aisé de remarquer. Tout cecy quoy qu'énoncé un peu diversement se peut tirer du livre de M. Uvallis. Mais il n'a pas fait une speculation sur ces figures, de laquelle il sera sans doûte bien aise d'étre adverti, & qui peut passer pour un des miracles de la Geometrie. Je l'ay autresois donné à Toricelli aussi bien que la precedente. C'est comme il arrive que quelquesfois l'espace prolongé à l'infini, comme B A D F E G H est aussi infini, comme en l'hyperbole ordinaire, & quelquesfois fini, comme eu celles dont les exposants de B N surmontent ceux de B P. On demande, si lors que ledit espace prolongé à l'infini est égal à un espace fini, il a un centre de gravité fixe & certaine. Or il arrive une chose merveilleuse en cette recherche, & laquelle j'ay découverte, & démonstrée, c'est que quelquesfois ledit espace quoy que fini n'a point de centre de gravité fixe, & quelquesfois il en a. Car par exemple, lors que le produit du quarré B N, & de la droite B P, est égal aux produits semblablement tirez, la figure B A D F E G H prolongée à l'infini qui en ce cas est égale

au parallelogramme B I, n'a pourtant aucun centre de gravité. Mais si le produit, par exemple, du cube B N & de la droite B P est égal aux produits semblables & semblablement tirez, en ce cas non seulement l'espace de la figure prolongée à l'infini, est égal à un espace donné, qui est, comme nous avons dit, la moitié du parallelogramme B I, mais encore cette figure prolongée à l'infini a un centre de gravité, qui va en ce cas en la ligne P F coupée en telle sorte au point O, que la ligne P O soit égale à la ligne K P. Et ce point O sera ledit centre de gravité de cette figure prolongée à l'infini. Si Monsieur Uvallis veut avoir la demonstration de cette proposition & de la regle generale pour trouver lesdits centres de gravité, je vous l'envoyeray pour luy en faire part.

Pour ce qui regarde la quadrature du cercle dans sondit traitté, je n'en suis pas pleinement persuadé, car ce qui se deduit par comparaison en Geometrie n'est pas toûjours veritable.

Je ne vous parle ny de vôtre livre, ny de celuy de Thomas Anglus, *ne sutor ultra crepidam*. Vous estés souverain en Physique, & je vous reconnois pour tel. J'espere pourtant au premier voyage de vous entretenir de la proportion que gardent les graves dans leur descente naturelle, dequoy vous avés traitté dans vôtre Livre que Monsieur Borel m'a fait la faveur de me faire voir. Je suis, &c.

Problema propositum à D. de Fermat.

Quæstiones purè Arithmeticas vix est qui proponat, vix qui intelligat. Annon quia Arithmetica fuit hactenus tractata Geometricè potius quam Arithmeticè? Id sane innuunt pleraque & Veterum & Recentiorum volumina. Innuit & ipse Diophantus, qui licet à Geometria paulò magis quam cæteri discesserit, dum Analyticen numeris tantum rationalibus adstringit: Eam tamen partem Geometriâ non omnino vacare probant satis superque Zetetica Vietæa; in quibus Diophanti methodus ad quantitatem continuam, ideoque ad Geometriam porrigitur. Doctrinam itaque de numeris integris, tanquam peculiare sibi vendicat Arithmetica patrimonium. Eam apud Euclidem leviter dumtaxat in elementis adumbratam, ab ijs autem qui secuti sunt, non satis excultam, (nisi forte in ijs Diophanti libris, quos injuria temporis abstulit, delitescat,) aut promovere studeant *ἀριθμητικῶν παῖδες*, aut renovare. Quibus ut præviam lucem præferamus, Theorema seu Problema sequens, aut demonstrandum aut construendum proponimus. Hoc autem si invenerint, fatebuntur hujusmodi quæstiones nec subtilitate, nec difficultate, nec ratione demonstrandi, celebrioribus ex Geometria esse inferiores.

Dato quovis numero non-quadrato, dantur infiniti quadrati qui in datum numerum ducti, adscitâ unitate, conficiant quadratum. Exemplum. Datur 3. numerus non-quadratus; ille ductus in quadratum 1, adscitâ unitate, conficit 4, qui est quadratus. Item idem 3 ductus in quadratum 16, adscitâ unitate, facit 49, qui est quadratus. Et loco 1 & 16, possunt alij infiniti quadrati idem præstantes inveniri. Sed Canonem Generalem, Dato quovis numero non-quadrato, inquirimus. Quæratur, verbi gratia, quadratus, qui ductus in 149, aut 109, aut 433, &c. adscitâ unitate conficiat quadratum.

Lettre de M. de Fermat à Monsieur le Chevalier Kenelme Digby.

Du 20. Iuin 1657.

MONSIEUR,

J'ay receu vôtre derniere lettre à la veille du départ de M. Borel, qui ne me donne quasi pas le loisir de vous faire un mot de réponse. Vos deux lettres *Angloises* m'ont esté traduites par un jeune *Anglois*, qui est en cette ville, & qui n'a point connoissance de ces matieres ; de sorte que sa traduction s'est trouvée si peu intelligible, que je n'y ay peu decouvrir aucun sens reglé ; & ainsi je ne puis vous resoudre, si ce Mylord à satisfait à mes questions,ou non. Il me semble pourtant au travers de l'obscurité de cette traduction bourruë, que l'Autheur des lettres à trouvé mes questions un peu trop aisées; ce qui me fait croire, qu'il ne les a pas resoluës. Et par ce qu'il pourroit equivoquer sur le sens de mes propositions, j'ay demandé un nombre cube en nombres entiers, lequel adjoûté à toutes ses parties aliquotes fasse un nombre quarré. J'ay donné par exemple 343, qui est cube, & aussi nombre entier, lequel adjoûté à toutes ses parties aliquotes fait 400, qui est un nombre quarré. Et par ce que cette question reçoit plusieurs autres solutions, je demande un autre nombre cube en entiers, qui joint à toutes ses parties aliquotes fasse un nombre quarré ; Et si le Mylord Brouncker répond, qu'en entiers il n'y a que le seul nombre 343. qui satisfasse à la question, je vous promets, & à luy aussi, de le desabuser en luy en exhibant un autre. Je demandois encore un quarré en entiers, qui joint à toutes ses parties aliquotes fasse un cube. Pour la question proposée dans l'écrit Latin, que je vous envoyay, elle est aussi en nombres entiers. Et partant les resolutions en fractions (lesquelles peuvent étre d'abord fournies *à quolibet de trivio Arithmetico*) ne me satisferoient pas. Je suis, &c.

Lettre de M. de Fermat à Monsieur le Chevalier Kenelme Digby.

Du 15. Aoust 1657.

MONSIEUR,

J'ay receu avec joye & satisfaction vôtre dernier pacquet, & quand il ne contiendroit autre nouvelle, que celle de vôtre convalescence, & du retour de vôtre santé, c'est un bien si grand, & si considerable pour tous ceux qui aiment les belles lettres, qu'ils ne peuvent en recevoir un plaisir mediocre. J'ay receu la copie de la lettre de Monsieur Uvallis, que j'estime comme je dois, & j'advoüe, que ses figures sont les mémes que les miennes; & que ses conclusions pour leur quadrature sont aussi les mémes; mais sa façon de demonstrer, qui est fondée sur induction plûtôt que sur un raisonnement à la mode d'Archimede, faira quelque peine aux novices, qui veulent des syllogismes demonstratifs depuis le commencement jusqu'à la fin. Ce n'est pas que je ne l'approuve, mais

toutes ſes propoſitions pouvant étre demonſtrées *viâ ordinariâ, legitimâ & Archimedæa* en beaucoup moins de paroles, que n'en contient ſon livre, je ne ſçay pas, pourquoy il a preferé cette maniere par notes Algebriques à l'ancienne, qui eſt & plus convainquante, & plus elegante, ainſi que j'eſpere luy faire voir à mon premier loiſir. Je voudrois qu'enſuite il eût determiné les centres de gravité de ces hyperboles infinies en diſtinguant celles qui en ont, d'avec celles qui n'en ont pas : car tandis qu'il dira, que la choſe luy eſt connüe, & qu'il n'en a pas voulu charger ſon livre, il ne me perſuadera pas; Et d'autant plus, que la propoſition generale ſans demonſtration me ſuffira de ſa part; Et je vous réponds à l'advance, qu'elle ne ſçauroit contenir plus de huit, ou dix lignes. Dés qu'il me l'aura envoyée, je luy feray part de ma ſpeculation ſur ce ſujet, & de ma façon de demonſtrer.

Pour les queſtions des nombres, j'oſe vous dire avec reſpect & ſans rien rabatre de la haute opinion que j'ay de vôtre Nation, que les deux lettres de Mylord Brounker, quoy qu'obſcures à mon égard & mal traduites, n'en contiennent aucune ſolution. Ce n'eſt pas que je pretende par là renouveller les joûtes & les anciens coups de lances, que les Anglois ont autrefois fait contre les François. Mais ſans ſortir de la Metaphore, j'oſe vous ſouſtenir, & à vous, Monſieur, plus juſtement qu'à tout autre, qui excellez aux deux meſtiers, que le hazard, & le bon-heur ſe mélent quelquefois aux combats de ſcience auſſi bien qu'aux autres, & qu'en tout cas nous pouvons dire, que *non omnis fert omnia tellus.* Je ſeray pourtant ravy d'étre détrompé par cét ingenieux & ſçavant Seigneur, & pour luy témoigner, que nôtre combat ne ſera point à outrance, je me relâche dans la queſtion ſuivante, que je m'en vay luy propoſer, de la rigueur de mes premieres queſtions, qui ne vouloient que des nombres entiers : il me ſuffira, qu'ils ſoient rationaux à la mode de Diophante. Le nom de cét Autheur me donne l'occaſion de vous faire ſouvenir de la promeſſe, qu'il vous a pleu me faire de recouvrer quelque manuſcrit de cét Autheur, qui contienne tous les treize livres, & de m'en faire part, s'il vous peut tomber en main. Voicy la nouvelle queſtion ou pour Mylord Brounker, ou pour Monſieur Uvallis, que j'écris en Latin ſuivant vôtre ordre.

Datum numerum ex duobus numeris cubis compoſitum dividere in duos alios numeros cubos.

Hanc propoſitionem in quadratis tantùm exequutus eſt Diophantus. In cubis ne tentavit quidem, in ijs ſaltem libris, qui ad nos de majore ipſius opere pervenerunt.

Exempli gratiâ, proponatur numerus 28. ex duobus Cubis 1. & 27. compoſitus, oportet dictum numerum 28. in duos alios Cubos rationales dividere, & propoſitionis ſolutionem generaliter præſtare.

Je conſens, que Monſieur Frenicle l'entreprenne, je ſuis perſuadé, qu'il ne la trouvera pas ſi aiſée, que les autres, que je ſçavois étre de ſa juriſdiction. Je l'eſtime extraordinairement auſſi bien que vous, mais pourtant ce que je m'en vay adjoûter, l'eſtonnera, ſi vous prenés la peine de le luy communiquer. Je luy avois écrit, qu'il n'y a qu'un ſeul nombre quarré en entiers, qui joint au binaire faſſe un cube, & que ledit quarré eſt 25. auquel ſi vous adjoûtés 2. il ſe fait 27. qui eſt cube. Il a peine à croire cette propoſition negative, & la trouve trop hardie & trop generale. Mais pour augmenter ſon étonnement, je dis que ſi on cherche un quarré, qui adjoûté à 4. faſſe un cube, il n'en trouvera jamais que deux en nombres entiers, ſçavoir 4. & 121. car 4. adjoûté à 4. fait 8. qui eſt cube: & 121. adjoûté à 4. fait 125. qui eſt auſſi cube: mais aprés cela toute l'infinité des nombres n'en ſçauroit fournir un troiſiéme, qui ait la méme proprieté.

Je ne ſçay ce que diront vos Anglois de ces propoſitions negatives, & s'ils les trouveront trop hardies. J'attens leur reſolution, & celle de Monſieur Frenicle, qui n'a point répondu à une longue lettre, que M. Borel luy rendit de ma part; dequoy je ſuis ſurpris, car je luy répondois exactement à tous ſes doûtes, & luy faiſois quelque queſtion de mon chef, dont j'attends la ſolution. Je ſuis, &c.

J'oubliois

J'oubliois de vous dire, que Monsieur Borel a écrit à son pere que Monsieur l'Ambassadeur de Hollande s'étonnoit dequoy je n'avois pas répondu à M. Schooten qu'il pretend avoir resolu mes questions, & m'en avoir proposé d'autres. Mais je vous asseure, que je n'ay rien veu de sa part, & que si vous m'en envoyés copie, j'y répondray.

J'ay mis la proposition un peu plus generale dans la page suivante où elle me semble étre mieux. On la peut concevoir pour M. Frenicle, qui aime les nombres entiers, en ces termes.

Trouver deux nombres cubes, dont la somme soit cube: & trouver deux nombres cubes, dont la somme soit égale à deux autres nombres cubes.

Proposuit Diophantus datum numerum quadratum in duos quadratos dividere.

Item. Datum numerum ex duobus quadratis compositum in duos alios quadratos dividere.

Quæstionem autem ad cubos evehere, nec ipse, nec Vieta tentavit.

Quidni igitur famosam propositionem, & recentioribus reservatam Analystis, expedire aut dubitemus, aut differamus?

Proponatur itaque, datum numerum cubum in duos cubos rationales dividere.

Item. Datum numerum ex duobus cubis compositum in duos alios cubos rationales dividere.

*Remarques * de M. de Fermat sur l'Arithmetique des Infinis de Monsieur Vvallis Professeur de Geometrie en Angleterre dans l'Université d'Oxford.*

1\. EN son Epître il declare comment il s'est mis à la recherche de la Quadrature du Cercle, & dit que quelques veritez qui ont esté descouvertes en Geometrie, luy ont donné l'esperance, qu'elle se pourroit trouver. Ces veritez sont,

Que la raison des cercles infinis du Cone aux infinis du Cylindre est connuë, sçavoir celle du Cone au Cylindre qui a méme base & hauteur: & pareillement la raison des diametres desdits Cercles, sçavoir celle du Triangle qui passe par l'Axe du Cone, au parallelogramme, qui passe par l'Axe du Cylindre.

Comme aussi on a la raison du Conoïde parabolique au Cylindre circonscrit, & celle de la parabole au parallelogramme, qui passent par leurs Axes, qui sont comme l'assemblage des Diametres des Cercles infinis, qui composent lesdits solides.

De plus, qu'on a aussi trouvé la raison des ordonnées tant au Triangle, qu'au Conoïde parabolique, ou parabole, qui sont les Diametres desdits Cercles.

D'où il conclud, que puis qu'on a trouvé aussi la raison de la Sphere au Cylindre circonscrit, ou celle de l'infinité des Cercles paralleles, dont on peut concevoir que la Sphere est composée, à pareille multitude de ceux qui se peuvent feindre au Cylindre; on pourra aussi esperer de pouvoir découvrir la raison des ordonnées en la Sphere, ou au Cercle, à celle du Cylindre, ou Quarré, sçavoir la raison des Diametres des Cercles infinis, qui composent la Sphere, aux Diametres des Cercles du Cylindre; ce qui feroit avoir la quadrature du Cercle.

Mais de méme qu'on ne pourroit pas avoir la raison de tous les Diametres pris ensemble des Cercles, qui composent le Cone, à ceux du Cylindre circonscrit, si on n'avoit la Quadrature du Triangle non plus que la raison des Diametres des Cercles qui composent le Conoïde parabolique, à ceux qui font le Cylindre circonscrit, si on n'avoit la Quadrature de la Parabole. Ainsi on ne pourra pas connoître la raison des Diametres de tous les Cercles, qui composent la Sphere, à ceux des Cercles, qui compo-

*Les Problemes cy-devant imprimés page 188. & 190. envoyez par M. de Fermat à M. le Chevalier Digby avec ces Remarques, ont esté le sujet d'un Livre de M. Uvallis celebre Professeur de Geometrie dans l'Université d'Oxford; le titre de ce Livre imprimé en Angleterre en 1658. est. Commercium Epistolicum, inter D. Vicecomitem Brouncker Anglum; D. Kenelmum Digby; D. Fermatium Senatorem Tolosanum; D. Frenicium Nobilem Parisinum, cum D. Joh. Uvallis Geomet. Profess. Oxonij; D. Franc. à Schooten, Math. Prof. Lugduni Batavorum; Aliisque.

sent le Cylindre circonscrit ; si on n'a pas la Quadrature du Cercle. Car de demander la raison, qu'il y a entre les Diametres de tous les Cercles Paralleles, qu'on peut conceevoir en la Sphere (lesquels Diametres pris tous ensemble, ne sont autre chose, qu'un Cercle) & ceux des Cercles, qu'on peut feindre au Cylindre circonscrit (lesquels font un quarré circonscrit audit Cercle) cela n'est autre chose, que de demander la raison du Cercle au quarré circonscrit.

2. En la méme Epitre aprés avoir posé une suite de nombres, sçavoir 1. 6. 30. 140. 630. il demande le terme moyen, qui doit étre mis entre 1. & 6. Je responds, que si on a égard à la suite entiere desdits nombres, on ne peut poser aucun terme moyen entre lesdits 1. & 6. pource qu'en cette suite les nombres ne font pas une proportion continuë ; mais en autant de façons, que l'un est comparé à l'autre, autant sont ils de proportions differentes, de sorte que ce sont plusieurs proportions, ou progressions disjointes, & ainsi quand on prendroit un terme moyen entre 1. & 6. il n'auroit rien de commun avec les autres nombres.

Toute la proportion ou suite, qu'on peut remarquer en ces nombres, consiste au raport qu'ont entr'eux les nombres, dont ils proviennent par multiplication, ausquels on voit une espece de progression Arithmetique ; neantmoins ne sçauroit passer aux nombres susd[its], en telle sorte que par iceluy on puisse donner un terme moyen entre deux des nombres, qui ait correspondance à toute la suite : au contraire la proprieté méme de cette progression fait, qu'il n'y en peut avoir. Voicy comment.

Les nombres donnez 1. 6. 30. 140. 630. sont produits par les suivans en multipliant, 1. $4\frac{2}{1}$. $4\frac{2}{2}$. $4\frac{2}{3}$. $4\frac{2}{4}$. ou les equivalens 1. $\frac{6}{1}$ $\frac{10}{2}$ $\frac{14}{3}$ $\frac{18}{4}$.

En ces nombres, qui servent à faire les donnés, il est facile à voir où est le raport: Il consiste aux premiers, en la seule augmentation du denominateur de la fraction, qui y est jointe, ce qui fait diminüer les nombres d'autant plus, qu'ils s'éloignent du premier terme, sçavoir de 1. & aux 2[mes], 1. $\frac{6}{1}$ $\frac{10}{2}$ &c. (qui sont les mémes en autres termes) les numerateurs des fractions augmentent de 4. & les denominateurs de l'unité, ce qui fait pareillement diminüer les nombres, tant plus la progression avance ; en sorte que celuy qui est le plus proche du premier terme 1. sçavoir $4\frac{2}{1}$ ou $\frac{6}{1}$ qui vaut 6. est le plus grand de tous.

Il faut aussi remarquer, que le raport des nombres de ladite progression n'arrive pas jusques au premier terme 1. ou plûtôt ne commence pas dés le premier terme, mais au second seulement, qui est sa borne ; De sorte que si on vouloit augmenter les termes de ladite progression, en la changeant & mettant un nombre moyen entre le premier & le second terme, sçavoir entre 1. & $4\frac{2}{1}$. ou $\frac{6}{1}$ il ne faudroit pas avoir égard à 1. mais aux autres nombres $4\frac{2}{1}$. $4\frac{2}{2}$. $4\frac{2}{3}$. $4\frac{2}{4}$. ou à ces autres qui sont les mémes $\frac{6}{1}$ $\frac{10}{2}$ $\frac{14}{3}$ $\frac{18}{4}$. car cette progression n'auroit pas de suite, si on la commençoit par 1.

Puis donc qu'il ne faut pas avoir égard au premier terme 1. qui n'a rien de commun avec les nombres de ladite progression ; mais aux autres seulement, & qu'ils augmentent à mesure, qu'ils approchent du premier terme 1. il s'ensuit, que le nombre, qu'on prendroit entre 1. & $4\frac{2}{1}$ ou $\frac{6}{1}$ seroit plus grand, que ledit $\frac{6}{1}$ ou 6. & il faudroit multiplier le premier terme 1. par ce nombre moyen, qui seroit plus grand que 6. pour avoir le moyen terme entre les deux premiers des nombres premierement donnez, qui sont 1. & 6 (car lesdits nombres donnez 1. 6. 30. 140. 630. n'ont point d'autre raport ou liaison que celle, qu'ils empruntent de leurs multiplicateurs, autrement ils n'en ont aucune) & ainsi on auroit un nombre plus grand que 6. pour le moyen terme d'entre 1. & 6. ce qui est absurde.

De là s'ensuit, qu'on ne peut donner le moyen terme entre 1. & 6. en tant qu'ils sont

compris en la suite ou progression des nombres 1. 6. 30. 140. 630.

On peut inferer de là, que la ligne courbe V C, n'est point égale en elle méme, & qu'elle ne peut provenir d'aucun mouvement continu, qui soit égal ou reglé; mais de plusieurs differens, suivant ses parties; & que c'est une ligne composée de portions de plusieurs courbes comprises entre les paralleles à l'axe V X de la figure: car en icelle il est bien necessaire, que la moyenne ligne tirée entre la premiere & la seconde paralleles, sçavoir entre 1. & 6. soit moindre que 6. mais outre que cette moyenne ligne seroit de differente longueur suivant la nature & la proprieté de cette portion de la courbe V C, qui n'a rien de commun avec les autres portions, comme a esté dit; elle n'auroit raport qu'avec les 2. termes, 1. 6. & non pas avec les autres, n'y avec les moyennes, qu'on auroit tirées entre-deux, si on prenoit le tout conjointement.

3. En la premiere proposition ledit sieur Uvallis propose une suite de quantités commenceans par *o*, (qui represente le point) & qui se suivent en progression Arithmetique; & cherche quelle raison il y a entre la somme desdites quantitez, & la somme d'autant de termes égaux à la plus grande des données.

Le moyen qu'il donne pour trouver cette raison, est de prendre les sommes de diverses quantitez de nombres commenceans par les moindres; puis comparer les raisons les unes aux autres, & inferer de la une proposition universelle.

On se pouvoit servir de cette methode, si la demonstration de ce qui est proposé étoit bien cachée; & qu'auparavant de s'engager à la chercher on se voulut asseurer à peu prés de la verité: mais il ne s'y faut fier que de bonne sorte, & on y doit apporter les precautions necessaires; car on pourroit proposer telle chose & prendre telle regle pour la trouver, qu'elle seroit bonne à plusieurs particuliers, & neantmoins seroit fausse en effect, & non universelle; de sorte qu'il faut étre fort circonspect pour s'en servir; quoy qu'en y apportant la diligence requise elle puisse étre fort utile, mais non pas pour prendre pour fondement de quelque science, ce qu'on en aura deduit; comme fait le sieur Uvallis; car pour cela on ne se doit contenter de rien moins, que d'une demonstration, & principalement au sujet de la proposition, dont il s'agit; dont la solution & demonstration est fort facile.

Voicy comme on demonstrera que lesdites quantitez proposées, étans jointes ensemble, font la moitié d'autant de quantitez égales à la plus grande d'icelles.

Soient exposées des quantités ou nombres, qui commencent par le point, ou par *o*, & qui se suivent en progression Arithmetique, & soient celles de la premiere ligne.

1. *o. a. b. c. d.* Quantités données.
2. *d. d. d. d. d.* Quantités égales à la plus grande des données.
3. *d. c. b. a. o.* Excés des plus grandes par dessus les données.

Puisque les quantités données sont en progression Arithmetique, le troisiéme terme *b*, surpassera le second de pareille quantité, que le second (sçavoir *a*) surpasse le premier qui est *o*; mais l'excés de *a* par dessus *o* est *a*; & partant toutes ces quantités se surpasseront l'une l'autre de proche en proche, selon la quantité du second terme *a*. Et si on prend les quantités de 2. en 2. laissant une d'icelles entre-deux, comme sont *a*, *c*, ou *b*, *d*, de la premiere ligne; leur difference sera le troisiéme terme, comme il est evident: & de méme si on les prenoit de 3. en 3. elles auroient le quatriéme terme *c*, pour leur difference.

De là il s'ensuit, que si on prend autant de termes égaux au plus grand terme *d*, des quantités données, comme en la seconde ligne; leur excés pardessus les quantitez données sera égal ausdites quantités données; comme on voit en la troisiéme ligne. Car l'excez de *d*, par dessus la plus grande des quantitez données, sçavoir par dessus *d*, est *o*, qui est le premier terme des quantitez données; l'excez du méme *d*, pardessus le terme precedent *c*, est le second terme *a*, comme il a esté monstré; sçavoir pource que les 2. quantitez *c* & *d*, sont prochaines: & ensuite l'excez du *d*, par dessus *b*, sera *b*, & ainsi des

autres; jusques à ce, qu'enfin étant au premier terme *o*, l'excez de *d*, par dessus iceluy fera le méme *d*: & ainsi la ligne des excez, qui est la troisiéme, sera égale à la premiere qui contient les quantitez données. Mais la premiere & la troisiéme ligne étant jointes ensemble; sçavoir les quantitez données, étant jointes aux excez des quantitez de la seconde ligne par dessus celles de la premiere, qui sont les données, font ladite seconde ligne, qui a chacun de ses termes égal au plus grand de ceux de la premiere, partant la seconde ligne, ou le plus grand terme des données, pris autant de fois qu'il y a de termes, sera double de la premiere ligne, c'est à dire des quantitez données. Ce qu'il falloit demonstrer.

4. En la seconde proposition il requiert, que le premier terme soit *o*, & le second *1*, autrement il dit que *moderatio est adhibenda*.

A cela je dis, que si on commence par *o*, quelque nombre qu'on mette pour le second terme, la somme d'autant de fois le plus grand terme sera toûjours double des quantitez données; car si pour *a*, *b*, *c*, *d*; on prend quelques nombres, qu'on voudra, qui soient en progression Arithmetique depuis le premier terme *o*, cela succedera toûjours en la méme sorte, ainsi qu'il a esté cy-devant demonstré.

Lettre de Monsieur le Chevalier Digby à M. de Fermat.

Du 5. Decembre 1657.

MONSIEUR,

Je me donnay l'honneur de vous écrire le 19. du mois passé, depuis ce temps là j'ay esté en Normandie, & à mon retour j'ay trouvé la Lettre que vous m'avés fait l'honneur de m'écrire du 17. du méme mois, dont je vous rends tres-humbles graces, & m'estime tres-heureux de vous servir dans le commerce qui est entre vous & Monsieur de Frenicle, à qui je monstray aussi vôtre Lettre, & comme vous y parlez de nôtre Chancellier Bacon, cela me fit souvenir d'un autre beau mot qu'il dit en ma presence une fois à feu Monsieur le Duc de Bouquingam. C'étoit au commencement de ses malheurs, quand l'Assemblée des Estats, que nous appellons le Parlement, entreprit de le ruiner, ce qu'elle fit en suite: ce jour là il en eût la premiere alarme. J'étois avec le Duc ayant disné avec luy, le Chancelier survint, & l'entretint de l'accusation qu'un de ceux de la Chambre Basse avoit presentée contre luy, & il supplia le Duc d'employer son credit auprés du Roy pour le maintenir toûjours dans son esprit: le Duc luy répondit qu'il étoit si bien avec le Roy leur Maître qu'il n'étoit pas besoin de luy rendre de bons offices auprés de Sa Majesté; ce qu'il disoit, non pas pour le refuser, car il l'aymoit beaucoup, mais pour luy faire plus d'honneur; le Chancelier luy répondit de tres-bonne grace, qu'en effet il croyoit étre parfairement bien dans l'esprit de son Maître, mais aussi qu'il avoit toûjours remarqué que pour si grand que soit un feu, & pour si fortement qu'il brûle de luy méme, il ne laissera pourtant pas de brûler mieux & d'étre plus beau & plus clair si on le souffle comme il faut; de méme j'ay dit à Monsieur Frenicle que pour si grand feu d'esprit qu'il ait, & quelque merveilleux que soit son genie pour la science des nombres, son feu seroit plus brillant s'il le vouloit exciter ou augmenter par l'estude, par la lecture des Anciens & par la conversation. Il vous honnore infiniment, & dit que jamais homme n'a approché de vôtre fond de science, il m'a apporté ce matin un écrit pour vous l'envoyer, je l'ay fait copier par mon Secretaire, car vous ne l'auriés peu lire, il écrit d'ordinaire sur de lambeaux de papier, & si vîte

qu'il n'y a que luy même qui puisse lire son écriture. Vous autés veu par ma derniere Lettre que j'ay receu celle que vous me fites l'honneur de m'écrire lors que vous estiés à la campagne. Au lieu de vous laisser passer le titre de paressenx que vous vous donnez injustement, j'admire infiniment la facilité & la presence avec laquelle au milieu de vos grandes occupations vous exprimez sur le champ vos profondes & subtiles pensées. Je vous supplie de croire que j'honnore vos rares talens, & que je voudrois que mes actions vous peussent témoigner mieux que mes paroles à quel point je suis, &c.

Lettre de Monsieur le Chevalier Digby à M. de Fermat.

Du 12. Decembre 1657.

MONSIEUR,

Depuis que je me suis donné l'honneur de vous écrire une Lettre du 5. de ce mois, je receus celle que vous m'avés fait la faveur de m'écrire du 25. du passé, dont je vous rends tres-humbles graces; elle me fut renduë comme j'étois à table avec Monsieur Frenicle à qui je la montray, & y ayant papier & ancre sur le buffet, je le priay de vous écrire quelque petit mot sur ce que vous y disiés sur son sujet, je vous envoye son écrit: il me fait souvenir fort souvent d'un Aumônier qu'avoit le feu Roy d'Angleterre, qui étoit un des plus Eloquens Predicateurs de son temps, & tres-subtil Theologien: mais depuis que la guerre fut commencée il n'y avoit plus moyen de le faire précher ou parler de sa science, il n'avoit d'autres idées en son imagination que de machines de guerre & des stratagemes pour prendre des Villes, en quoy il n'entendoit rien du tout: ainsi Monsieur Frenicle ne me veut entretenir d'autre chose que de la Theologie Mystique & de ses pensées sur le Franc-arbitre, ou sur la predestination, quittant le rang qu'il pourroit posseder d'un des plus grands Mathematiciens du siecle pour un des moindres Theologiens: car c'est bien tard de commencer la Physique & la Theologie aprés l'âge de cinquante ans, je dis la Physique, parce qu'il est mal-aisé d'étre un grand Theologien si on n'est un solide Physicien, & si on n'a une veritable connoissance de la nature dont le sommet sert de base à la grace. Mais je dois bien prendre garde de m'engager en ce que j'entens aussi peu & encore moins que luy, je reviens à ce que je sçay de science certaine, dont je vous feray demonstration evidente toutes les fois que l'occasion s'en presentera, & c'est que je suis, &c.

Lettre de Monsieur le Chevalier Digby à M. de Fermat.

Du 13. Fevrier 1658.

MONSIEUR,

Je suis sur le point d'entrer en carrosse pour aller à Roüen, dont je ne croy pas revenir de 15. jours ou trois semaines, c'est pourquoy dés que j'eus receu vôtre pacquet du 27. du passé j'allay chez Monsieur Clerselier, & n'y ayant pas moyen de luy faire faire des copies de vos écrits avant mon départ, je creus que vous trouveriez bon que je les luy confiasse sur la parole qu'il me donna de vous les rendre fidelement dés qu'il auroit tiré copie de ce qu'il luy faut: c'est un fort honnéte homme.

& fort vôtre serviteur, il m'a dit qu'il se donneroit l'honneur de vous écrire, par cét Ordinaire. Au reste, Monsieur, quand bien je demeurerois icy je ne serois pas assez vain pour accepter la charge que vous voudriez m'imposer, elle est trop pesante pour ma foiblesse, je sçay trop bien, *quid ferre recusent, quid valeant humeri*, pour pouvoir étre Arbitre entre deux Grands Personnages il faut aller du pair avec eux: Crassus s'aquitta bien mal de cette fonction entre Cæsar & Pompée, n'ayant pas les reins aussi forts qu'eux. Il est vray que ceux qui sont dans les valées peuvent discerner la hauteur des plus grandes montagnes pour en avoir de l'admiration. Mais pour bien juger de ce qu'il y a au sommet de quelqu'une d'elles il faut étre monté aussi haut sur une autre. Vous me permettrez donc de vous dire avec le grossier Palæmon, *non nostrum inter vos tantas componere lites*, Et pour ce qui est de la chaleur avec laquelle vous, Monsieur, & Monsieur Descartes avés soûtenu vos sentimens, je ne serois pas d'avis d'en rien oster ou changer, pourveu qu'il n'y ait rien qui soit offenceant, ce qu'on ne peut presumer de deux aussi grands hommes, & à quoy Monsieur Clerselier prendra garde. Car de vouloit étouffer ce petit feu brillant & étincelant, ce seroit ôter beaucoup de la grace & de la force à une contestation d'esprit & de science, & c'est une des raisons pourquoy les disputes aux Universitez des Suisses sont si peu agreables, leur maniere d'argumenter étant bien éloignée de la vivacité des Bacheliers de la Sorbonne qui pressent avec vehemence & avec chaleur; car cette chaleur provient d'un feu qui ne brûle pas, mais qui semble donner la lumiere & la vie comme celle du Soleil. Je ne sçaurois m'empécher de vous envoyer quelques Vers que le plus grand genie de nôtre Isle pour les Muses écrivit au Chancelier Bacon, qui étoit son grand amy, & que vous témoignez étre fort le vôtre en le citant souvent. Je vous diray comment je les ay rappellez en ma memoire: l'autre jour m'entretenant avec une personne de grand merite de vos rares qualitez, je luy recitay ces vers y mettant vôtre nom au lieu de celuy de Baco, il en voulut avoir une copie, je la luy fis transcrire par mon Secretaire sur le broüillard que j'en fis à la hâte, il vous en auroit fait aussi une copie s'il eût esté chez moy, mais je viens de l'envoyer chez Monsieur l'Ambassadeur d'Angleterre. Je suis, &c.

Lettera del Signor Digby al Signor Di Fermat.

Di 15. Maggio 1658

ILL.MO SIG. PADRON COL.MO.

Haurei temuto d'infastidire troppo V. S. Illustrissima con nuova lettera, se la sua ultima delli 4. del corrente, non m'havesse recata cagione (quantunque in soggetto di poco rilievo) di renderle qualche picciola servitù ò più presto ossequio e conformità alli suoi commandi; Havendo imparato dal savio, che come c'è tempo di parlare, vi lo è anche del silentio; & dallo spiritoso Poëta Thosco, che

Il silentio ancor suole
Haver prieghi e parole.

Ma lei havendomi fatto l'honore d'ordinarmi di mandarle un de' miei libri della Physica in Inglese, non l'ho voluto lasciar andare senza accompagnamento di queste poche righe, per ringratiarla della sua tanta compiacenza in dire che ha intento di trascorrerlo, per auvezzarsi così alla nostra tozza favella; rozza in quant'al suono, & ingrata all' orechia non auvezza a essa; ma forse, quanto alla copia, proprietà, & energia dell'espressioni, & all'eleganza e politezza in ogni altro genero, che non cede punto alle più eleganti e stimate, ne delle volgari, ne delle dotte, che habbino mai ha-

vuto prattica nel mondo, e che nelle poësie che habbiamo, non solo va del pari, ma auvanza di gran lunga li migliori ò Toscani, ò Latini, ò Greci; eccettuando però nell'Heroica Homero & Virgilio, i quali doi, senza contrasto, son fuori d'ogni comparatione con tutti de i secoli dopo loro, e però, prudentemente fece quel Grammatico ardito Giuglio Scaligero (che maggior epitheto non gli posso conceder io, quantunque i pedanti moderni gl' affigghino il titolo invidioso di divino Critico) che in vece di far censura dell' ultimo e forse il minore di essi, gl' eresse un altare. Onde veramente alle volte lamento la sorte che ci ha fatti,

Penitus toto divisos orbe Britannos.

Poiche habbiamo parecchie compositioni Poëtiche lequali meritarebbono la luce & il godimento universale, e per lequali capire, ho conosciuto 4. persone di spiriti sublimi & ingegnosissimi (doi Francesi, e doi Italiani) che per haver visto delle grossieri interpretationi in prosa di certi carmi Inglesi, si sono applicati con fervore a studiare nostra lingua, per bever alla schietta fonte delle nostre acque, le quali hanno poi confessato haver gli più sedato la loro sete in simile materia, che qualsivoglia abondante fiume di altra regione in terra ferma. Per conformarmi dunque al voler di V. S. J. ho messo in mano del Messaggiero di Tolosa Lunedi passato un involto contenendo il mio detto libro, del quale veramente non ne haveva piu copia apresso di me, havendo per cio scritto in Inghilterra, doue è stato ristampato questo trattato tre ò quattro volte in ambedue le Università di Oxonio e Cantabrigia: e poi che lei si uvole penare di dar un' occhiata à questo mio componimento, mi rallegro molto che cio sia nella lingua nella quale io l'ho conceputo: Per esser che quantunque il tradottore sia stato huomo dottissimo, e la sua traduttione essaminata per tutto il Collegio de i Dottori Inglesi di questa Città tutti valenti Theologii quali la fecero fare per servir allo studio di tutti i loro seminarij, nientedimeno, egli è cosa certa, che ci è gran differenza tra l'original & il transcritto, inquanto al vigor dell'espressione, e credo che dopo haver vissuto sempre in nostra corte polita, e conversato continüamente co'l Bacono, il Seldeno e altri maggiori lumi della nostra Patria, non si stimarebbe vanità in me s'io mi attribuisse lo scriver correttamente in Inglese. E quando io feci il primo disegno di questo dicorso, godevo di tranquillità assai per spiegar con maggior chiarezza cio che voleva dire, essendo che lo feci nello spatio di quelli quasi doi anni ch'io fui continüamente su'l mare: durante il quale, è ben vero che quasi ogni giorno hebbi occasione di prepararmi a combattere con la mia flotta (essendo nel mar mediterraneo circondata dalle forze Francesi e Spagnuole, con chi hauevamo allora guerra, e anche dalle Vineziane) nientedimeno mi avuanzava tanto tempo, che se non fosse stato che per evitar il tedio (ancorche il comando del Rè fu il mio primo motivo) mi accingevo ogni giorno con premura a metter qualche cosa in carta, dimodo che posto con ragione dire come quel più dotto & gentil cavagliero di tutta la nation Castigliana, e Prencipe de'loro Poëti Garcilasso de la Vega,

Entre las armas del sangriento Marte
Hurtè del tiempo esta breve suma,
Tomando hora la spada, hora la pluma.

Ma poi che lei si degna voler veder de i meschini parti del mio sterile ingegno, ho volsuto farle parte ancora d'un altro trattaticivolo che ho composto intorno all'Infallibilità della Religione Catholica per dar sodisfatione a un' de' maggiori genij ch'io habbia mai conosciuto, e che finalmente l'ha convinto. Perche lui non si contentava di considerar Iddio come un Legislatore, che volesse dimonstrare il suo potere con dar premij ò pene secondo una volontà imperiosa senza motivo ragionevole fondato in natura, e però bisognò penetrar nella Filosofia della Religione, e perche essa sia necessaria a gl'huomini. In una parola, bisognò combattere in lui tutte le maggiori forze de' più dotti Sociniani (la più terribil' setta d'Here tici che sia mai stata) nel che

fare ho qui impiegato tutto'l vigore del mio debbole ingegno in una ſtrada non calcata d'altri, & tutte le piu ſquiſite eſpreſſioni che sò della lingua noſtra, & non ne feci ſtampare. ſe non 30. copie per dar ad amici confidenti. Gli mando ancora un altro trattato Ingleſe, che ha fatto gran romore in Inghilterra & che molti vogliono attribuire a me, ancor che ſia ſotto il nome del Signor Bianchi (conoſciuto ſotto titolo di Thomas Anglus) per eſſer che i ſentimenti dell'Autor & li miei ſiano preciſamente gl'iſteſſi. Dimando perdono de'l mio tanto importunarla, & la riveriſco, &c.

Lettre de Monſieur Paſcal à M. de Fermat.

De Bienaſſis le 10. Aouſt 1660.

MONSIEUR,

Vous étes le plus galand homme du monde, & je ſuis aſſurement un de ceux qui ſçay le mieux reconnoître ces qualitez là & les admirer infiniment, ſurtout quand elles ſont jointes aux talens qui ſe trouvent ſingulierement en vous: tout cela m'oblige à vous témoigner de ma main ma reconnoiſſance pour l'offre que vous me faites, quelque peine que j'aye encore d'écrire & de lire moy méme: mais l'honneur que vous me faites m'eſt ſi cher que je ne puis trop me hâter d'y répondre. Je vous diray donc, Monſieur, que ſi j'étois en ſanté je ſerois volé à Toloſe, & que je n'aurois pas ſouffert qu'un homme comme vous eût fait un pas pour un homme comme moy. Je vous diray auſſi que quoy que vous ſoyez celuy de toute l'Europe que je tiens pour le plus grand Geometre, ce ne ſeroit pas cette qualité là qui m'auroit attiré. Mais que je me figure tant d'eſprit & d'honéteté en vôtre converſation que c'eſt pour cela que je vous rechercherois. Car pour vous parler franchement de la Geometrie, je la trouve le plus haut exercice de l'eſprit, mais en méme temps je la connois pour ſi inutile que je fais peu de difference entre un homme qui n'eſt que Geometre, & un habile artiſan. Auſſi je l'appelle le plus beau métier du monde, mais enfin ce n'eſt qu'un métier; & j'ay dit ſouvent qu'elle eſt bonne pour faire l'eſſay, mais non pas l'employ de nôtre force: de ſorte que je ne ſerois pas deux pas pour la Geometrie, & je m'aſſure que vous étes fort de mon humeur. Mais il y a maintenant cecy de plus en moy que je ſuis dans des études ſi éloignées de cét eſprit là, qu'à peine me ſouviens je qu'il y en ayt. Je m'y étois mis il y a un an ou deux par une raiſon tout a fait ſinguliere, à laquelle ayant ſatisfait je ſuis en hazard de n'y plus penſer jamais, outre que ma ſanté n'eſt pas encore aſſez forte, car je ſuis ſi foible que je ne puis marcher ſans baſton, ny me tenir à cheval. Je ne puis méme faire que trois ou quatre lieües au plus en carroſſe, c'eſt ainſi que je ſuis venu de Paris icy en vingt-deux jours: les Medecins m'ordonnent les eaux de Bourbon pour le mois de Septembre, & je ſuis engagé autant que je puis l'étre depuis deux mois d'aller de là en Poitou par eau juſqu'à Saumur pour demeurer juſqu'à Noël avec Monſieur le Duc de Roanes Gouverneur de Poitou, qui a pour moy des ſentimens que ie ne vaus pas. Mais comme je paſſeray par Orleans en allant a Saumur par la riviere, ſi ma ſanté ne me permet pas de paſſer outre, j'iray de là à Paris; Voilà, Monſieur, tout l'état de ma vie preſente, dont je ſuis obligé de vous rendre compte, pour vous aſſurer de l'impoſſibilité où je ſuis de recevoir l'honneur que vous daignez m'offrir, & que je ſouhaite de tout mon cœur de pouvoir un jour reconnoître ou en vous ou en Meſſieurs vos enfans, auſquels je ſuis tout devoüé, ayant une veneration particuliere pour ceux qui portent le nom du premier homme du monde. Je ſuis, &c.

Clariſſimo

VIRO CLARISSIMO DOM. GASSENDO*

Petrus de Fermat. S. P.

De proportione quâ gravia decidentia accelerantur.

PRonuntiavit Galileus motum uniformiter acceleratum esse eum, qui à quiete recedens temporibus æqualibus æqualia celeritatis momenta sibi superaddit.

Eum verò qui æqualibus spatijs æqualia celeritatis momenta sibi superaddit, adeo non convenire motui gravium descendentium affirmat, ut ex eo supposito motum in instanti fieri deducat, & ut sibi persuasit, facillimè demonstrat.

Sed concedatur, si placet, viro perspicaci & Lynceo indemonstrata conclusio dummodò sit vera. Demonstrationem enim dum primo statim obtutu,

Aut videt, aut vidisse putat per nubila,

Nihil mirum si lectoribus minus utique Lynceis parum videatur satisfecisse.

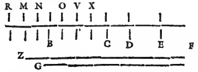
Ut igitur constet suus honor Galileo, neque ampliùs de ipsius illatione ambigatur, aut rationibus tantum probabilibus disputetur, propositionem ipsam more Archimedæo hîc demonstratam habebis.

Si quotlibet rectæ ad unum punctum concurrentes exponantur in continua proportione, earum intervalla erunt in eadem ratione, verbi gratiâ,



Sint rectæ A F, B F, C F, D F, E F, &c. in continua proportione, erunt intervalla ipsarum A B, B C, C D, DE in eadem ratione. Est enim ut tota A F ad totam B F ita ablata B F, à priore ad C F ablatam à posteriore. Ergo ita reliqua A B ad reliquam B C, ut tota ad totam, hoc est, ut A F ad B F, & sic de cæteris. Eâdem ratione demonstrabimus ut A F, ad C F, ita esse A B ad C D, & ut B F, ad D F, ita esse B C, ad D E, &c.

Si intelligatur motus à puncto F versus punctum A continuè acceleratus secundum rationem decursorum spatiorum & exponantur quotlibet continuè proportionales ut A F, B F, E F, &c. tempus in quo mobile percurret spatium D E, erit æquale tempori, in quo idem mobile percurret spatium D C, denique spatia omnia E D, D C, C B, eodem tempore singula percurrentur,



Demonstrabimus primò spatia C B, B A, eodem tempore in supposito motu percurri. Si enim tempus per A B, non est æquale tempori per B C, erit vel majus, vel minus, Sit primum majus si fieri potest. Ergo tempus per A B, est ad tempus per B C, ut aliqua recta major ipsâ B F, ad ipsam B F: sit recta illa Z. Ergo est ut tempus per A B, ad

* Hæc epistola Typis edita fuit tomo 6. operum Gassendi inter epistolas ad eum scriptas.

tempus per B C ita recta Z ad rectam B F, ſumantur inter rectas N F, B F, tot mediæ in continua proportione, ut R F, M F, N F, donec minor ex ipſis ut A F, ſit minor quam recta Z, quod quidem neceſſariò eventurum vel ex ſola mediæ inventione, ejuſque iteratâ, quoties opus fuerit, operatione, quis non videt?

Erunt ergo continuæ proportionales rectæ AF, RF, MF, N F, BF, cùm autem ſit ut A F, ad B F, ita B F, ad C F, & ita A B, ad BC, ergo poterit continuari proportio ſub eodem numero terminorum, ut ſint etiam proportionales B F, O F, V F, X F, C F, idque in eadem ſuperiorum ratione.

His ita poſitis & conſtructis conſiderentur & comparentur ſingula ſpatia A R, R M, M N, N B, ſingulis ſpatijs B O, O V, V X, X C, ſingula nempe ſingulis, hoc eſt ſpatium A R, ſpatio B O: ſi igitur per ſpatium A R, fuerit motus uniformis juxta gradum velocitatis in puncto R acquiſitum, tempus per A R, ad tempus per B O, componeretur ex ratione ſpatij A R, ad ſpatium B O, & viciſſim ex ratione velocitatis per B, ad velocitatem per R, quod notiſſimum eſt, & Galileus ipſe demonſtravit propoſitione quintâ tractatus de motu æquabili.

At ut ſpatium A R, ad ſpatium B O, ita per primam propoſitionem recta A F, ad rectam B F, & ut velocitas per B, ad velocitatem per R, ita ex ſuppoſita motus accelerati juxta ſpatia decurſa definitione, recta B F ad rectam R F, ergo tempus per A R, hoc caſu ad tempus per B O, componeretur ex ratione A F, ad B F, & ex ratione B F, ad R F, eſſet igitur motus per A R, ad motum per B O, ut recta A F, ad rectam R F: deinde ſi per ſpatium R M, fieret motus uniformis juxta gradum velocitatis in O acquiſitum, eâdem ratione probabitur motum per R M, ad motum per O V, eſſe ut recta R F, ad rectam M F: ſimiliter conſiderando velocitates punctorum N, & V, erit tempus per M N, ad tempus per V X, ut M F, ad M F: denique conſiderando velocitates punctorum B, & X, in ultimis ſpatijs erit tempus per R B, ad tempus per X E, ut N F, ad B F, ſed omnes ejuſmodi rationes nempe A R, ad R F, R F, ad M F, M F ad N F, N F, ad B F, ex conſtructione ſunt eædem.

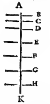
Ergo tempus omnium motuum per totam A B, ad tempus omnium motuum per totam B C, in utriſque ſpatijs, ita ut diximus, conſideratorum eſt ut recta A F, ad R F, ſive N F, ad B F, ſed tempus motus accelerati per A R, eſt minus tempore motus per A R uniformis juxta velocitatem in R, cùm enim à puncto R, uſque ad punctum A, perpetuò ex hypotheſi velocitas creſcat, ergo à puncto R, ad punctum A, citiùs per motum acceleratum pervenitur, quàm ſi velocitas acquiſita in R, eadem & uniformis uſque ad punctum A, perſeveraret. Eâdem ratione probabitur tempus motus accelerati per R M eſſe minus tempore motus uniformis per R M, ſi velocitas ipſius ultimo ipſius ſpatij M puncto reſpondeat. Denique conſtat motum per totam AB, acceleratum, ut fiet hypotheſis, minori tempore fieri quàm motum alium fictitium ex motibus uniformibus juxta velocitates ultimis ſpatiorum A R, R M, M N. NB, punctis reſpondentes compoſitum, at contra tempus motus accelerati per B O, eſt majus tempore motus uniformis per B O, conſiderati juxta velocitatem puncti B, quia velocitas à puncto B, ad O, ſemper creſcit in motu accelerato, juxta hypoteſin, & minor ſemper eſt velocitate, quæ reſpondet puncto B: unde pari ratiocinio concludetur motum per totam B C, acceleratum, ut fiet hypotheſis, majori tempore fieri, quàm motum illum fictitium ex motibus uniformibus juxta velocitates primis ſpatiorum B O, O V, V X, X C, punctis reſpondentes compoſitum.

Cum ergo tempus motus accelerati per A B, ſit minus tempore motus illius fictitij per eandem A B, & contra tempus motus accelerati per B C, ſit majus tempore motus illius fictitij per eandem B C, ergo minor eſt ratio temporis motus accelerati per A B, ad tempus motus accelerati per B C, quàm temporis motus fictitij per AB, ad tempus motus fictitij per BC: ſed ut tempus motus accelerati per AB, ad tempus motus accelerati per B C, ita poſuimus eſſe rectam Z ad rectam B F, & ut tempus

motus fictitij per A B, ad tempus motus fictitij per B C, ita demonstravimus esse N F, ad B F, ergo minor est ratio rectæ Z ad rectam B F, quàm rectæ N F, ad eamdem B F, quod est absurdum, cùm recta Z sit major recta N F.

Ergo tempus motus accelerati per A B, non est majus tempore motus accelerati per B C. Eâdem facilitate probabimus tempus motus per A B, accelerari non esse minus tempore motus accelerati per B C : sit enim minus, si fieri potest, erit igitur ut tempus motus per AB, accelerati ad tempus motus accelerati per B C, ita recta minor ipsâ B F, ad ipsam B F, esto itaque recta illa minor quam B F G, & sit tempus motus accelerati per A B, ad tempus motus accelerari per B C, ut G, ad rectam B F, & inter rectas B F, C F, exponatur continuè proportionalium series quarum maxima O F, sit major quàm G. Eodem quo usi sumus in superiori demonstrationis parte ratiocinio conferendo spatia in ipsâ B, inter similes proportionales intercepta, cum spatijs B O, O V, V X, X C, mutemus solummodo velocitates uniformes, & fingamus verbi gratiâ motum per A R, uniformem fieri juxta gradum velocitatis in puncto A acquisitæ, motum verò uniformem per B O, fieri juxta velocitatem acquisitam in puncto, O & sic in reliquis spatijs in quibus patet omnes velocitates per A B, uniformes augeri, velocitates verò per B C, uniformes minui, contrà id quod in priore demonstrationis parte fuerat usurpatum. Concludetur ut suprà tempus motus hujusmodi uniformis per A R, ad tempus motus uniformis per B O, esse ut recta R F, ad rectam A F, dum enim augentur velocitates, tempora motuum minuuntur : similiter tempus motus uniformis per R M, ad tempus motus uniformis per O V, erit ut M F, ad M R : denique tempus motus fictitij illius per A B, ex uniformibus compositi ad tempus motus fictitij per B C, ex uniformibus pariter compositi erit ut R F, ad A F, cum omnes rationes sint eædem, hoc est ut O F, ad BF, per primam propositionem.

Tempus autem motus accelerati per A B, est majus tempore motus illius fictitij ex uniformibus compositi, cum supposuerimus in motibus uniformibus auctas fuisse velocitates, quæ nimirùm in hoc casu primis spatiorum A R, R M, &c. punctis respondent: sed & tempus motus accelerati per B C, est minus tempore motus fictitij ex uniformibus compositi, quia hîc velocitates minuuntur, & ultimis spatiorum B O, O V, &c. punctis respondent. Ergo major est ratio temporis motus accelerati per B C, quam temporis motus fictitij per A B, ad tempus motus fictitij per B C : sed ut tempus motus accelerati per A B, ad tempus motus accelerati per B C; ita est recta G, ad rectam B F, ex suppositione : ut autem tempus motus fictitij per A B, ad tempus motus fictitij per B C, ita recta O F, ad B F, ex demonstratione; ergo recta G, ad rectam B F, majorem proportionem habet, quàm recta O F, ad rectam B F, quod est absurdum, cùm recta G, sit minor rectâ OF, ex constructione: non ergo tempus motus accelerati per AB, est minus tempore motus accelerati per BC, sed nec majus ut supra demonstratum est, ergo est æquale. Eadem ratione patet tempus motus accelerati per C D, æquari tempori motus accelerati per A B, & tempori motus accelerati per B C, & continuatis, si placet, in infinitum rationibus, omnia omninò spatia eodem tempore percurri.





His positis tertiâ propositione mentem Galilei revelamus, aut propositionis verita-

tem astruimus. Intelligatur motus gravium descendentium à quiete ex puncto A usque ad punctum H, verbi gratia, & supponatur, si fieri potest, velocitatem gravis cadentis accelerari juxta rationem spatiorum decursorum. Ponatur motus jam factus ab A, usque ad H, tempore unius minuti, aut altero quovis tempore determinato, & supponatur motus continüari usque ad punctum K, aio motum per H K, fieri in instanti. Si enim motus per H K, non fiat in instanti, fiet in tempore aliquo determinato, quod per aliquem numerum multiplicatum excedet tempus in decursu spatij A H insumptum. Ponatur numerus multiplicans 5. ita ut tempus motus per H K, quinquies sumptum excedat tempus motus per A H, rectis K A, H A, sumatur tertia proportionalis G A, & toties continüetur proportionalium series, donec spatiorum interceptorum numerus excedat numerum quinque: fiant ergo ex proportionalibus continüatis sex, verbi gratiâ, spatia ultra punctum H, quæ sint H G, G F, F E, E D, D E, C B, ergo tempus motus per H G, per præcedentem est æquale tempori motus per H K, similiter tempus motus per G F, est æquale tempori motus per H K. Denique motus per totam H B, fiet in tempore quod ad tempus per H K, erit sextuplum. At tempus temporis per H K, quintuplum est majus tempore motus per A H, ergo à fortiori tempus motus per H B, tempore motus per totam H A, est majus, quod est absurdum. Ergo vera remanet Galilei illatio quamvis eam ipse non demonstrârit.

Hæc breviter & familiariter, Clarissime Gassende, scripsimus, ne tibi impostèrùm facessat negotium aut Cazræus, aut quivis alius Galilei adversarius, & in immensum excrescant volumina, quæ unicâ demonstratione, vel fatentibus ipsis authoribus aut destruentur, aut inutilia & superflua efficientur. Vale.

*Lettre de Monsieur Gassendi à Monsieur de *****

MONSIEUR,

Il y a déja quelque temps que Monsieur le President de Donneville s'étant donné la peine de me venir voir, me laissa un écrit de Monsieur de Fermat touchant l'accroissement de vîtesse qui est en la cheute des corps, & parce que je n'ay point eu l'honneur de le revoir depuis, & que je ne sçay point son logis pour le luy pouvoir rendre, & que d'ailleurs il me semble qu'il me dit en passant qu'il avoit charge de vous le remettre aprés qu'il me l'auroit monstré, je me suis advisé de vous l'envoyer sans plus attendre, avec les tres-humbles remerciemens que je dois à mondit sieur de Fermat de la bonté qu'il a eüe de m'en donner la communication. Il seroit superflu de vous dire, combien j'en suis satisfait, puisque comme vous sçavés mieux que tout autre rien ne peut partir d'une telle main qui ne soit parfait en tout point. Je suis, &c.

*Lettera del Signor Benedetto Castelli Abbate di Verona, al Signor di *****

ILL.^MO ED ECC.^MO SIG.^RE

Ho Letti i pensieri sottilissimi del Sig.^r di Fermat Intorno al centro di gravità, e confesso liberamente che mi sono parsi belli, & degni di quello sublime intelletto, che mi fu celebrato con alta lode dal Signor di Beaugrand, quando passò per Roma, e voglio credere che ne habbia assoluta dimostratione; e perche il Sig.^re di Beaugrand mi disse di havere dimostrata una simile propositione, cioè, che il medesimo grave posto in diverse lontananze dal centro della terra pesava inegualmente, e che il peso al peso era come la distanza alla distanza dal centro della terra, io mi applicai à pensare à questa materia, e pretesi allhora di havere ritrovata la dimostratione, mà dopo essendo mi state promosse alcune difficoltà, mi raffreddai in questa specolatione: mi ricordo però che ancor io ne deducevo la medesima consequenza, che deduce ancora il Signor di Fermat, cioè, che il grave che haverà il suo centro di gravità col centro della terra non haverà peso alcuno: e di più che la terra tutta non ha peso: e in oltre ne cavai, che descendendo un grave verso il centro della terra non solo và mutando peso di momento in momento, ma (cosa che puo parere più marauigliosa) il suo centro di gravità si va continuamente movendo nella mole di esso grave; di più che un grave di qualsivoglia figura che si mova in se medesimo circolarmente pure va continuamente mutando il suo centro di gravità: e per tanto facilmente concorro con il Sig.^r di Fermat, che il centro di gravità non sia in natura tale quale l'hanno descritto communemente i Mechanici: e se io credessi che le mie debolezze potessero esser care al Signor di Fermat, gli ne mandarei una copia, non solo per ricevere documenti da S. Sig.^ria Illma ma per fare acquisto di un tale e tanto padrone, al quale prego V. S. J. dedicarui servitore di singolare devotione, e li bacio le mani.

VIRO CLARISSIMO DOM. DE RANCHIN, Sen. Thol. Petrus de Fermat S. P.

POlyænum tibi tuum, Vir Clarissime, mitto, sed observanda in eo quædam suppeditat codex manuscriptus optimæ notæ auctorum rei militaris hactenus ineditorum quem penes me habeo; apud eum collectionem quamdam præceptorum & monitorum militarium inveni sub nomine Παρεκβολῶν, cujus auctorem licet manuscriptus non detegat, colligo tamen ex glossario Græcobarbaro Meursij, eum esse Heronem, non illum quidem Alexandrinum cujus spiritalia & alia quædam opuscula extant, & qui antiquo, hoc est, optimo ævo, Græcè scripsit, sed alium posterioris ævi, quod pleraque ipsius vocabula Græcobarbara satis innuunt; utrumque, ætatem nempe & nomen auctoris, confirmat Meursius in voce κοντοβέργιον ubi citantur sequentia Heronis verba in παρεκβολαῖς, ἐπειδὴ γοῦν τῆς νυκτὸς εἰς τὰ ἄπληκτα αὐτῶν καὶ τὰ κοντοβέργια, hæc enim verba cum in meo manuscripto desint, supplendum in eo nomen auctoris ex manuscripto Meursii; tempus vero quo hæc scribebantur & quo voces ἄπληκτον & κοντοβέργιον in usu erant, ultra septingentos plus minùs annos non videtur excurrere;

hoc autem παρεκβολῶν tractatu, pleraque Polyæni stratagemata suppresso authoris nomine alijs sæpe verbis referuntur, quandoque & iisdem, unde ampla emergit emendationum & notarum criticarum penus; celebriores aliquot tibi, vel si mavis doctis omnibus tuo nomine jure repræsentationis libenter exhibeo.

Cleomenis stratagema narratur lib. 1. Polyæni pag. 20. editionis Tornæsianæ sequentibus verbis, Κλεομένης Ἀργείοις ἐπολέμει καὶ ἀντεστρατοπέδευσεν, ἦν τις Ἀργείοις ἀκριβὴς φυλακὴ τῶν δρωμένων τοῖς πολεμίοις, καὶ πάντα ὅσα Κλεομένης βούλοιτο ὑπὸ κήρυκος σημαίνειν τῇ στρατιᾷ, καὶ αὐτοὶ τὰ ἴσα δρᾷν ἐπετήδευον, ὁπλιζομένων ἀνθωπλίζοντο, ἐξιόντων ἀντεπεξῄεσαν, ἀναπαυομένων ἀντανεπαύοντο. Κλεομένης λάθρα παρέδωκεν ὅταν ἀριστοποιεῖσθαι κηρύξῃ, ἐξοπλίσασθαι, ὁ μὲν ἐκήρυξεν, οἱ δὲ Ἀργεῖοι πρὸς ἄριστον ἐτράποντο, Κλεομένης ὡπλισμένους ἐπαγαγὼν ἅμα πᾶσι ἀνόπλους καὶ γυμνοὺς τοὺς Ἀργείους ἀπέκτεινεν, hoc loco post verba ἐξιόντων ἀντεπεξῄεσαν, addendum ex manuscripto ἀριστώντων, ἠρίστων, quod finis ipsius stratagematis plenissimè confirmat.

Themistoclis stratagema, eodem libro pag. 44. refertur hoc modo, Θεμιστοκλῆς Ἰώνων Ξέρξῃ συμμαχούντων, ἐπέλευσε τοὺς Ἕλληνας κελαγγέρειν ἐπὶ τοῖς τείχεσι, Ἄνδρες Ἴωνες οὐ δίκαια ποιεῖτε στρατεύοντες ἐπὶ τοὺς πατέρας, τούτων ἀναγινωσκομένων βασιλεὺς ὑπόπτους αὐτοὺς ἐποιήσατο, corrigendum ex manuscripto ἐλογίσατο, quam esse veram lectionem innuit sensus.

Agesilai stratagema occurrit lib. 20. pag. 86. Ἀγησίλαος, ait ille, ἐν Κορωνείᾳ Ἀθηναίοις ἐνίκησεν, ἤγγειλέ τις, οἱ πολέμιοι φεύγουσιν εἰς τὸν νεὼν τῆς Ἀθηνᾶς, ὁ δὲ προσέταξεν ἐᾶν αὐτοὺς οἷ καὶ βούλοιντο ἀπιέναι, ὡς ἄρα μὴ σφαλερὸν συμπλέκεσθαι τοῖς ἐξ ἀπονοίας μαχομένοις, ibi loco vocis Ἀθηναίοις reponendum ex manuscripto Θηβαίοις.

Aliud Agesilai stratagema refert Polyænus eodem libro pag. 103. Ἀγησίλαος ἐν ταῖς διαπρεσβείαις ἠξίου τῶν πολεμίων τοὺς μάλιστα δυνατοὺς πέμπεσθαι πρὸς αὐτὸν οἷς διαλέξεται περὶ τῶν κοινῇ συμφερόντων, τούτοις ἐπὶ πλεῖστον συγγινόμενος, καὶ κοινωνῶν ἑστίας καὶ σπονδῶν, ἐκίνει στάσιν ἐν ταῖς πόλεσι διὰ τὰς τῶν πολλῶν ὑποψίας. Vulteius hoc modo interpretatur: Agesilaus in legationibus petebat ab hostibus ut maxime potentes ad se mitterent; cum quibus de communi utilitate sermones conferret, cum his plurimum habens consuetudinis, & communicans focum ac cineres, seditiones in urbibus excitabat propter vulgi suspiciones. Videtur interpres loco verbi σπονδῶν quod est in textu Græco, legisse σποδῶν cum vertat cineres, sed nihil mutandum ex manuscripto evincitur ubi leguntur hæc verba καὶ ἔχων πρὸς αὐτοὺς πόμενος.

Clearchi stratagema narratur libro eod. pag. 110. his verbis, Κλέαρχος ὢν ἐν Θρᾴκῃ, νυκτερινοὶ φόβοι τὸ στράτευμα κατελάμβανον, ὁ δὲ παρήγγειλεν, εἰ γένοιτο νύκτωρ θόρυβος, μηδένα ὀρθὸν ἀνίστασθαι, ὁ δὲ ἀναστὰς ἀναιρείσθω, τὸ παράγγελμα τοῦτο ἐδίδαξε τοὺς στρατιώτας καταφρονεῖν τοῦ νυκτερινοῦ φόβου. Verba quædam hîc supplenda ex manuscripto, quæ tamen videtur in suo codice vidisse interpres Latinus, licet desint in editione græcâ Tornæsij, sunt autem sequentia, καὶ οὕτως ἐπαύσαντο ἀναπηδῶντες καὶ ταρασσόμενοι. Atque ita desierunt exilire ac perturbari.

Perdiccæ stratagema sequens legitur libro 4. pag. 114. Περδίκκας Ἰλλυριῶν καὶ Μακεδόνων πολεμούντων ἐπειδὴ πολλοὶ Μακεδόνες ἡλίσκοντο ζωγρεῖν, καὶ οἱ λοιποὶ Μακεδόνες λύτρων ἐλπίδι πρὸς τὰς μάχας ἦσαν ἀτολμότεροι, ὁπηνίκα ἀφικνοῦντο περὶ λύτρων, ἐντειλάμενος τῷ κήρυκι ἐπανελθόντι ἀγγεῖλαι ὡς ἄρα λύτρα Ἰλλυριοὶ μὴ προσίοιντο, ἀλλὰ ψηφίσαιεν τοὺς αἰχμαλώτους κτείνειν. οἱ δὲ Μακεδόνες ἀπογνόντες τῆς διὰ τῶν λύτρων σωτηρίας θαρραλεώτεροι πρὸς τὰς μάχας ἐγένοντο, ὡς ἐν μόνῳ τῷ νικᾶν ἔχοντες τὸ σώζεσθαι, quod sic interpretatur Vulteius. Perdiccas Illyriis & Macedonibus bellum gerentibus cum multi Macedones caperentur vivi, reliqui etiam redemptionis spe ad pugnam minùs alacres erant, quibus legationem inter se de redemptoriis muneribus mittentibus, præcepit legato ut reversus nuntiaret se redemptoria munera Illyriorum non accepturum, sed condemnatos captivos morte affecturum, Macedones desperatâ salute redemptivâ audaciores ad pugnandum reddebantur, quippe quibus in solâ victoriâ salus posita esset. In hoc stratagemate vocem Ἰλλυριοὶ mutandam in Ἰλλυριῶν indicat nota marginalis editionis Tornæsianæ; si vera esset explicatio Vulteii, non solùm vera sed & necessaria esset illa emendatio, sed frigidissimum esset stratagema, si sequeremur sensum interpretis: Polyænus quippe vult Perdiccam præcepisse legato, ut

reversus nuntiaret Illyrios redemptoria munera non accepturos, & hic est verus sensus strategematis, quem Hero aliis verbis, secundùm hanc quæ est vera & germana interpretatio, expressit in manuscripto his verbis, ἐπιτηδεύσει τοιῷδε, παρασκευάσει τινὰ ὡς πρέσβεια ἐλθεῖν ἀπὸ τῶν πολεμίων εἰπεῖν ὅτι οἱ πολέμιοι ἐβουλεύσαντο καὶ ἀπεπείρασαν ἵνα ἴσως πραΰνωσιν αἰχμαλώτους ἀπολύσωσι.

Alexandri stratagema refertur etiam lib. 4. pag. 248. verbis sequentibus, Ἀλέξανδρος Δαρείῳ παρατάσσεσθαι μέλλων, σύνθημα τοῖς Μακεδόσιν ἔδωκεν. ἐν ἐγγὺς γένωνται τῶν Περσῶν ἐν γόνυ κλίναντας ταῖς χερσὶ διατρίβειν τὴν γῆν, ἐν δὲ ἡ σάλπιγξ ὑποσημήνῃ τότε δὲ...... Μακεδόνες οὕτως ἐποίησαν, οἱ δὲ Πέρσαι σχῆμα προσκυνήσεως ἰδόντες, τὴν πρὸς τὸν πόλεμον ὁρμὴν ἐξέλυσαν καὶ ταῖς γνώμαις ἐγένοντο μαλακώτεροι. Δαρεῖος δὲ ἐκεκύρωτο καὶ φαιδρὸς ἦν, ὡς ἀμαχὶ κρατῶν, οἱ Μακεδόνες ὑπὸ τῷ συνθήματι τῆς σάλπιγγος ἀναπηδήσαντες ῥυμηδὸν ἐμβάλλουσι τοῖς πολεμίοις καὶ τὴν φάλαγγα ῥήξαντες ἐν φυγὴν ἐτρέψαντο.

Hoc loco desunt quædam verba post vocem τότε, quæ supplenda ex manuscripto ubi narratio est integra & elegans; lacuna itaque ex eo sic replenda, τότε μετὰ θυμοῦ καὶ ἀνδρείας τοῖς πολεμίοις προσβάλλετε.

Pammenis stratagema tale proponitur libro 5. pag. 385. Παμμένης ὀλίγην ἔχων δύναμιν ὑπὸ πλειόνων ἐπολεμεῖτο· ἔπεμψεν αὐτόμολον ἐς τὸ τῶν πολεμίων στρατόπεδον, ὁ δὲ σύνθημα ἐκμαθὼν ἤγγειλε τῷ Παμμένει, ὁ δὲ νυκτὸς ἐπιθέμενος τοῖς πολεμίοις, πολλοὺς αὐτῶν φθείρας διεξεπαίσατο αὐτοὺς σύνθημα, τοὺς δὲ ἐν ἀπορίᾳ γνωρίζειν ἐν σκότει τοὺς οἰκείους μὴ δυναμένους διὰ τοῦ συνθήματος.

Hîc addenda ex manuscripto post verbum αὐτοῖς sequentia, αὐτοῖς μὲν καὶ ὁ τότε σταλεὶς ὑπεσήμαινε τὸ σύνθημα, ἐκείνοις δὲ ἀπορία ἦν ἐν τῷ σκότει τῆς νυκτὸς γνωρίζειν τοὺς ἰδίους ἢ τοὺς πολεμίους, τοῦ πολεμίου τὸ σύνθημα ἀποκρινομένου.

Pompisci stratagema refertur lib. 5. pag. 402. Πομπίσκος πολιορκῶν πόλιν, ἐπὶ μὲν τῶν πολλῶν τῆς χώρας ἐξιέναι τοὺς πολεμίους ἐκώλυσεν, ἐπὶ δὲ μίαν ἕνα συνεχῶς.... καὶ τοὺς λῃζομένους ἀπέχεσθαι τῶν τότε ἐπετίταξεν, οἱ δὲ ἐκ τῆς πόλεως ἀδεῶς ἐνταῦθα προῄεσαν, ὁ δὲ περὶ τὸν καιρόν, ὡς ἔμαθεν, τοὺς ὅπως πολλοὺς ἐπιθέμενος τοὺς πλείους αὐτῶν ἐχειρώσατο.

Vox συνεχῶς quæ hîc vulgò legitur, corrigenda ex manuscripto & loco illius reponendum συνεχέσι quod ex conjecturâ viderat Casaubonus ut patet ex ipsius notis.

Alexandri Pherensis stratagema refertur lib. 6. pag. 426. Ἀλέξανδρος Πάγασων πολεμούντος Ἀθηναίων πρὸς ἄφαντας τὰς Ἀττικὰς ναῦς φανερῶς ναυμαχεῖν οὐ θαρρῶν, διέπεμψεν ἐπὶ ἀκτῆς ὑπὸ νύκτα, &c. legendum esse, ἐπὶ ἀκτῆς, ut vult Casaubonus in notis, confirmat codex manuscriptus ubi legitur διὰ μακρᾶ πλοιαρίω, quæ verba idem sonant.

Cyri stratagema narrat Polyænus lib. 70. pag. 477. his verbis. Κῦρος Μήδοις παραταξάμενος τρὶς ἡττήθη· ἐπεὶ δὲ Περσῶν αἱ γυναῖκες καὶ τὰ τέκνα ἦσαν ἐν Πασαργάδαις τὴν τετάρτην μάχην ἐντεῦθα συνῆλθε, φυγὴν οἱ Πέρσαι, ὡς δὲ ἶδον τὰ τέκνα καὶ τὰς γυναῖκας, παθόντες ὑπ' αὐτοῖς ἀνέστρεψαν, καὶ τοὺς Μήδους ἀτάκτως διώκοντας τρεψάμενοι, νίκην τοσαύτην ἐνίκησαν, ὡς μηκέτι Κῦρον πρὸς αὐτοὺς ἄλλης δεῆσαι μάχης.

Hic loco vocis παθόντες corrigendum ex manuscripto συμπαθόντες, quæ vox itidem restituenda in stratagemate Apollodori pag. 435. manuscriptus noster ex quo coniicimus vocem παθόντες mutandam in συμπαθόντες verbis sequentibus rem narrat & stratagema Polyæni exprimit, οἱ δὲ συμπαθεῖα τούτων νικώμενοι, &c. vox autem illa melius authoris sensui respondet quam ἢ παθόντες vt legendum censuit Casaubonus.

Darii stratagema narratur lib. 7. pag. 489. hoc modo. Δαρεῖος ἐπολέμει Σάκαις τριχῇ διῃρημένοις, μιᾶς ἐκράτησε μοίρας, τῶν δὲ Σακῶν ἐξόντων τὰς ἐσθῆτας καὶ τὸν κόσμον καὶ τὰ ὅπλα περιθέμενος τοῖς Πέρσαις &c. hîc loco vocis ἐξόντων quæ est corrupta in editione Tornæsii, legendum ex manuscripto ἀναιρεθέντων.

Scipionis continentiæ exemplum laude dignissimum refertur lib. 8. pag. 568. sequentibus verbis, Σκιπίων δορυάλωτον λαβὼν ἐν Ἰβηρίᾳ πόλιν Φοινίκων, ὡς οἱ ψυχαγωγοὶ παρθένον ἤγαγον κάλλει ὑπερφυᾶ ἔχουσαν, τὸν πατέρα αὐτῆς ἀναζητήσας ἐχαρίσατο αὐτῷ τὴν θυγατέρα, τοῦ δὲ δῶρα προσκομίσαντος, ὁ δὲ καὶ ταῦτα συνεχαρίσατο, προῖκα φέρειν ἐπιδοῦναι τῇ κόρῃ, &c. ibi vulgò legitur ψυχαγωγοὶ quod interpres vertit captivorum ductores, sed legendum ex manuscripto, νυμφαγωγοὶ, hoc est virginum ductores, quæ correctio & verissima, & elegantissima, ut nullus superstit dubitandi locus.

Plura adjungerem, sed feriis jam desinentibus quatum beneficio otium supperebat, finem quoque huic παρεκβολῶν παρεκβολῇ imponimus. Vale & me ama.

VIRO CLARISSIMO D. DE PELLISSON, Libellorum supplicum Magistro.

Samuel de Fermat. S. P.

CRiticas observationes quas mihi nuper misisti, vir clarissime, sæpius legi non sine voluptate & admiratione; in illis enim ingenii, judicii, & doctrinæ dotes quas in te jampridem suspicimus ubique elucent: nihil autem invenire possim quod tanti muneris vice tibi referam, nisi commodùm egestati meæ succurrerent variæ lectiones quas vir tibi singulari conjunctus amicitiâ, cujus mihi jucunda semper est recordatio, margini apposuit quorumdam librorum quos sedulò pervoluebat, & quorum pleraque loca, sed ἐν παρέργῳ, emendavit; scis enim quàm præcoci ille ubertate florum amœnitatem fructuum maturitati junxerit, nec me latet quantâ ipse fiduciâ suas exercitationes solitus sit in tuum sinum effundere; licet autem omnes istæ quas excerpsi emendationes, vel parentis mei conjecturæ, tibi novitatis gratiâ non commendentur, illas tamen, quæ tua est comitas, te benignâ manu suscepturum non dubito.

Theonem Smyrnæum, ne te diutius morer, vir clarissime, nosti, auctorem operis illius cui titulus τῶν κατὰ μαθηματικὸν χρησίμων εἰς τὴν τοῦ Πλάτωνος ἀνάγνωσιν, quod prodromi instar est aut isagoges Philosophiæ Platonicæ, quæ nemini Geometriâ non initiato patebat: illud opus edidit Lutetiæ anno 1644. Ismael Bullialdus vir doctissimus & Latinitate donatum elegantibus notis illustravit; sed non omnibus illud mendis purgasse videtur, ut aliquot, ni fallor, exemplis, quæ sequuntur, planum fiet.

Primum occurrit pag. 78. illius operis ubi περὶ ἁρμονίας & συμφωνίας agit: locum illum exscribere non piget, ipsa enim series emendationis procul dubio necessitatem, & veritatem ostendet; τὰ γράμματα, ait ille, φωναὶ πρῶται εἰσὶ καὶ διαιρετοὶ καὶ ἐλάχισται, & inferiùs, τὰ δὲ διαστήματα ἐκ τῶν φθόγγων ὥσπερ πάλιν φωναὶ εἰσὶ πρῶται καὶ διαιρετικαὶ καὶ συγχωῖδες, huic voci διαιρετικαὶ asteriscus in margine respondet cum voce διαιρέται, at hîc reponenda bis videtur vox ἀδιαίρετοι loco τοῦ διαιρετοὶ & διαιρετικαὶ, legendum nempe γράμματα φωναὶ εἰσὶ ἀδιαίρετοι, idque confirmat Manuel Bryennius cap. 1. lib. 2. Ἁρμονικῶν: legendum præterea φθόγγων ὥσπερ πάλιν φωναὶ εἰσὶ πρῶται καὶ ἀδιαίρετοι, & hæc quoque lectio confirmatur verbis ejusdem Bryennii lib. 1. cap. 3. ubi dicit φθόγγος δὲ ἀρχὴ ἁρμονίας ὡς ἡ μονὰς τοῦ ἀριθμοῦ, τὸ σημεῖον τῆς γραμμῆς, καὶ τὸ νῦν τοῦ χρόνου, punctum, vero & instans sunt ἀδιαίρετα & consequenter φθόγγος ἀδιαίρετος, non dividendi vim habens, ut uult interpres Latinus: nec immerito Bacchius Senior in introductione artis musicæ quæstioni illi τί οὖν ἐστιν ἐλάχιστον τῶν μελῳδουμένων, respondet, φθόγγος, quem non tantum ἐλάχιστον, sed etiam ἄτομον esse docet antiquæ musicæ celeberrimus auctor Aristides Quintilianus lib. 1. de Musicâ, atque ita authoritas æque ac ratio suffragatur huic emendationi, quæ fit unius tantum litteræ mutatione. Minimâ quoque mutatione alia fit eodem capite licet minoris momenti correctio, ubi vulgò male legitur, φησὶ καὶ τοὺς Πυθαγορικοὺς, legendum scilicet, φασὶ, ut apud Bryennium λέγουσι. Paulò inferiùs ubi legitur ἀποτελεῖται ὁ φθόγγος βραδείας δὲ βαρύς, καὶ σφοδρᾶς μὲν μείζων ἦχος, ἠρέμα δὲ μικρός, legendum videtur ἠρεμαίας, & Bryennii authoritate confirmatur.

Hactenus de sono de quo agitur in cap. illo 6. In cap. vero 8. agitur de semitonio, & ita vulgò legitur κατὰ καὶ τὸ ἡμίτονον γράμμα ἐκ τῆς ἡμίσου φωνῆς καλοῦμεν οὐχ ὡς μὴ τῷ αὐτοτελεῖ κατὰ ταυτὸ φωνῆς, legendum vero videtur καθὸ non κατὰ: legendum præterea ἀλλ' ὡς μὴ αὐτοτελῆ καθ' αὑτὸ φωνὴν ἀποτελῶν, quæ lectio ejusdem Bryennii authoritate nixa veriorem vulgatâ sensum efficit.

Atque

Atque harum probatio lectionum desumi potest, ἐν τῷ περὶ τῆς μετρικῆς ὑποθέσεων ἐν τῷ περὶ τῆς μαθηματικῆς λαμβανομένων, ut Porphyrii verbis utar, quæ in commentariis clarissimi interpretis referuntur pag. 276. sed non sine mendo, malè enim ibi legitur, ἐν τῷ ὑπὸ τῆς μουσικῆς ὑποτιθεμένων.

Nec silentio prætermittenda est elegantissima, & audacter dicam, certissima alterius loci ejusdem Theonis emendatio paginâ 164. ubi de octonatio loquitur: refertur ibi vetus inscriptio quam in columna Ægyptiaca repetiri tradidit Evander hoc modo, Πρεσβύτατος πάντων Ὄσιρις θεοῖς ἀθανάτοις πνεύματι καὶ οὐρανῷ ἡλίῳ καὶ σελήνῃ καὶ γῇ καὶ νυκτὶ καὶ πατρὶ τῶν ὄντων καὶ ἐσομένων ΕΡΩΤΕ μνημεῖα τῆς αὐτοῦ ἀρετῆς βίου συντάξεως, id est, ut vertit Bullialdus, antiquissimus omnium Rex Osiris diis immortalibus Spiritui, & Cœlo, Soli, & Lunæ, & terræ, & Nocti, & Diei, & patri eorum quæ sunt quæque futura sunt, prædicabo memoriam magnificentiæ ordinis vitæ ejus: mendosum procul dubio in hac inscriptione illud ΕΡΩΤΕ, & hanc lectionem si retineas quis inde sensus elici poterit? legendum igitur ΕΡΩΤΙ, atque ita parvâ unius scilicet litteræ mutatione huic loco sua lux, & amori sua laus facile restituitur; nec aliena est ab hoc loco sapientissimi Platonis, cujus velut interpres Smyrnæus ille, sententia, dum ait in convivio καὶ μὲν δὴ τήν γε τῶν ζώων ποίησιν πάντων τίς ἐναντιώσεται μὴ οὐχὶ ἔρωτος εἶναι σοφίαν ᾗ γίγνεται καὶ φύεται πάντα τὰ ζῶα, etenim animalium omnium effectionem, ut vertit Serranus, ex amoris sapientiâ existere, ideft gigni atque nasci ecquis negaverit,

Per quem genus omne animantum
Concipitur, visitque exortum lumina Solis.

Apud Iulium Frontinum de aquæductibus Romæ pag. 106. editionis Plantinianæ, vulgò sic legitur: in vicenariâ fistulâ, quæ in confinio utriusque rationis posita est, utrique rationi penè congruit. Nam habet secundùm eam computationem, quæ interjacentibus modulis servanda est in diametro quadrantes viginti: cùm diametri ejusdem digiti quinque sint, & secundùm eorum modulorum rationem qui sequuntur ad eam, habet digitorum quadratorum ex gnomoniis viginti. Hîc procul dubio legendum non ad eam, sed aream: cujus emendationis ratio ex supputatione geometrica ducitur.

Eâdem etiam paginâ legitur, centenaria autem & centenum vicenum, quibus assiduè accipiunt, non minuuntur, sed augentur, Nec usu frequens est: videtur legendum Cen. ideft centenaria, loco vocis illius Nec, litteris scilicet ordine inverso accipiendis, cum fortasse in manuscripto repertum fuerit Cen hoc est centenaria, quod transcriptor transposuit & legendum Nec, particulâ sensui magis, ut videbatur, accommodatâ perperam existimavit.

His emendationibus unam aut alteram duorum insignium locorum addam, quorum primus est apud Sextum Empyricum, alter apud Athenæum: Sextus ille lib. 1. Pyrrhoniarum hypotyposeon pag. 12. ostendere conatur quam variæ sint pro diversitate ætatum Phantasiæ, παρὰ δὲ τὰς ἡλικίας, inquit, ὅτι ὁ αὐτὸς ἀὴρ τοῖς μὲν γέρουσι ψυχρὸς εἶναι δοκεῖ, τοῖς δὲ ἀκμάζουσιν εὔκρατος καὶ αὐτὸ βρῶμα τοῖς μὲν πρεσβυτέροις ἀμαυρὸν φαίνεται, τοῖς δὲ ἀκμάζουσι κατακορές, καὶ φωνὴ ἡ αὐτὴ τοῖς μὲν ἀμαυρὰ δοκεῖ τυγχάνειν τοῖς δὲ ἐξάκουστος, id est, ut vertit Henricus Stephanus, ex ætatibus autem quoniam idem aër senibus quidem frigidus esse videtur, aliis qui in ætatis flore constituti sunt bene temperatus, & idem cibus senibus quidem tenuis videtur, at iis qui florent ætate crassus, eodem modo & vox eadem, aliis quidem depressa esse videtur, aliis vero alta; at hujus loci elegantior sensus erit si legatur non βρῶμα sed χρῶμα, alioquin de sensu visus qui facilè maximam mutationem patitur, nullus hîc foret sermo: præterea τὸ ἀμαυρὸν meliùs colori convenit quam cibo, & æquè de colore ac de cibo dici potest τὸ κατακορές, sic apud Virgilium legimus, *saturatas murice vestes, & hyali saturo fucata colore.*

Nunc ad Athenæi locum transeo; quis autem urbanissimi illius scriptoris sales variâ conditos eruditione ignorat? Et si quid in eo frigidum aut inficetum occurrat, quis ibi mendum subesse non suspicetur? Suspecta igitur erit lectio loci illius in quo hic auctor lib. 12. loquitur de depravatis Alcibiadis moribus, qui locus si uulgatam lectionem

retineas ipſo forſan Alcibiade depravatior erit : Athenæi verba hæc ſunt, Λυσίας δ' ὁ ῥήτωρ περὶ τῆς τρυφῆς αὐτοῦ λέγων φησὶν, ἐκπλεύσαντες γὰρ κοινῇ Ἀξίοχος καὶ Ἀλκιβιάδης εἰς Ἑλλήσποντον ἔγημαν ἐν Ἀβύδῳ δύο ὄντε Μεδοντιάδα τὴν Ἀβυδηνὴν καὶ Ξυνοικείπην, ἔπειτα αὐτοῖν γίνεται θυγάτηρ ἣν οὐκ ἔφασαν δύνασθαι γνῶναι ὁποτέρου εἴη, ἐπεὶ δ' ἦν ἀνδρὸς ὡραία ξυνεκοιμῶντο καὶ ταύτῃ καὶ εἰ μὲν χρῷτο καὶ ἔχοι Ἀλκιβιάδης Ἀξιόχου ἔφασκεν εἶναι θυγατέρα, εἰ δ' Ἀξίοχος Ἀλκιβιάδου : error hic procul dubio in voce illa ξυνοικείπην, & legendum ξυνῳκείτην hoc eſt concubuerunt , atque ita ſi falſa Xynoceipe deleatur, & ſola ſuperſit illa duobus nupta Medontias, portentoſæ iſtorum iuvenum libidinis novitati nihil detrahetur ; veritas autem iſtius emendationis ſatis per ſe patet , & ex ipsâ loci ſerie elici poteſt , in quo illud δύο ὄντε alioqui ſupervacaneum foret, nec jam amplius ambigua proles ; ratio igitur illius correctionis in promptu eſt , cui ejuſdem Athenæi accedit authoritas, is enim lib. 13. iterum de Alcibiade loquitur hoc modo, Μεδοντίδος γοῦν τῆς Ἀβυδηνῆς ἐξ ἀκοῆς ἤρξατο καὶ πλεύσας εἰς Ἑλλήσποντον σὺν Ἀξιόχῳ ὃς ἦν αὐτοῦ τῆς ὥρας ἐραστής, ὥς φησι Λυσίας ὁ ῥήτωρ ἐν τῷ κατ' αὐτοῦ λόγῳ, καὶ ταύτης ἐκοινώνησεν αὐτῷ, id eſt ut interpretatur Dalechampius, Medontidem Abydenam auditione tantùm ille amare cœpit , & imprimis charam habuit , eam tamen cum Helleſpontum navibus adiiſſet , Axiocho navigationis comiti , & pulchritudinis ipſius amatori , ut inquit Lyſias in oratione quam contra eum ſcripſit , utendam dedit : ibi autem fictitiæ Xynoceipes nulla mentio, & illud ἐκοινώνησεν æque ac ξυνῳκείτην communes Alcibiadis , & Axiochi amores fuiſſe ſatis arguit.

Sed ab iſtorum juvenum voluptate oculos avertamus , & eam quæ ex ſtudiorum ſocietate percipitur, puriorem & diuturniorem, ſummumque adverſorum ſolatium litteras eſſe fateamur ; cum tu his mirum in modum oblecteris, non iniucundas tibi fore confido obſervationes in quibus amici manum agnoſces ; ipſius ego lucubrationum ſparſas varijs in locis reliquias è tenebris quibus abditæ jampridem erant , eruere conatus ſum, neque hæc contemnenda duxi, ut ex hoc ſpicilegio rerum quæ diligentiſſimos , ut ita loquar , meſſores latuerunt , pateat , quantam earum auctor in liberiori & conjecturis aperto critices campo ſegetem fuerit collecturus, ſi ſæpius in illo ſpatiari voluiſſet : Vale & me ama.

CEDE DEO,

SEU CHRISTUS MORIENS.

D. Petri de Fermat Carmen amœbæum ad D. Balzacum.

OBSTUPUIT totiesque elusum mentis acumen
Dedidicit vanos veris præferre colores
Luminibus. Quid bella moves, deletaque pridem
Numina præstigiis linguæ solertis adumbras
Infelix ratio? Num te simulachra tot annis
Desita, & imbelles Divûm sub imagine formæ
Fallaci cinxere metu? Num te ostia Ditis
Aut stygiæ remorantur aquæ, Elysiive recessus,
Et quidquid credi voluit Dijs æqua potestas?
Perge tamen quò te securo tramite ducunt
Balzaco præeunte viæ, nec inertia dudùm
Fatidicæ responsa Deæ, quercusve silentes
Dodonæ, aut taciti venerare oracula Phœbi;
Cede Deo. Cessit veterum numerosa propago
Cœlicolûm: Deus ecce Deus, quem prona parentem
Agnoscit natura suum, cui terra, salumque
Paret, & edomitæ fatalia flabra procellæ,
Submittuntque ipsæ jam non sua murmura nubes.
Hic puro fulgore micans, de lumine lumen
Dum traheret, Deus unus erat, natusque supremi
Æternâ æternùm manans de mente parentis
Assumpsit veros moriturae carnis amictus,
Si qua forte queat mortalia flectere corda,
Tantillumque animis extundere possit amorem.
At postquam summi tandem mandata parentis
Horrendo sacrum caput objecere furori,
Humanas mœrenti animo depromere voces
Cœpit, & insolito succussus membra fragore,
Omnipotens, si nondùm orbem mala nostra piarunt,
Et placet infandum pœnæ genus, en, ait, adsum
Victima, lethiferoque libens succedo dolori.
Cerne tamen sudore madens & sanguine corpus,
Et si nulla super nostræ tibi cura salutis,
At saltem solare animum non digna ferentem.
Dixit & humentes oculos ad sydera tollens,
Quas non ille preces, quæ non suspiria fudit
Anxius ærumnisque gravis, tua, rector Olympi,

Dum satagit, mentemque futuræ accingere pugnæ
Sponte parat? Cœlo intereà demissus ab alto
Aliger, ut varios animi componeret æstus,
Improvisus adest, ceciditque repente fragorum
Turba minax, auctæque superno robore vires
Despectant longè pœnas, nondumque paratæ
Incubuere Cruci: nam cur, supreme, moraris
Rector, ait, cur me per tanta pericula vectum
Sistis, inexpletoque obices opponis amori?
Dixerat, humanisque iterum succumbere curis
Visa caro, tristes agitant præcordia motus,
Necdum securo gressu vestigia ponit.
Hæc inter dubiæ mentis certamina totam
Noctem orat, socios altus sopor urget inertes,
Quos decuit vigiles oranti impendere curas.
Heu pavidæ mentes, si nec cœlestia tangunt,
Nec veræ virtutis honos, hoc munere saltem
Defungi jurata fides, jussumque magistri
Debuit una sequi; sed jam strepit undique murmur,
Et segni tenebras abrumpunt lumine tædæ;
Quò se cumque feret, jam vis inimica propinquat,
Fictaque adorantis species, verique dolores
Non procul. Infausti tandem sub pondere ligni
Deficit, affixusque cruci, jam verbera passus,
Jam spinas, laceros spargens tormenta per artus,
Nempe urgebat amor, nostræque cupido salutis,
Humanam egressus sortem, mortique tremendus
Dum fieret morti propior, fremitusque, minasque,
Et conjuratæ spernens convicia turbæ,
Degeneri vitam populo pacemque precatur,
Nec, quas ipse tulit pœnas, tortoribus optat.
Et jam finis erat, violataque pectora puri
Muricis undantes spargebant undique rivos.
Nec tamen imbelli subiit fata ultima mente;
Quin magis assurgens, divinaque lumina, Cœlo
Sic propior, vocemque sonoram ad sydera tollens,
Summe Deus, quid me moribundum deseris, & jam
Semianimem, populique tuoque furore fatigas?
Sat tibi, sat mundo dedimus, finitaque dudum
Singula præscriptas habuere oracula metas.
Sic fatur moriens, elataque lumina rursùm
Figit humi, nec jam Cœlum spectare facultas
Ulla datur, cecidere animi, marcentiaque ora
Æthereo vocem extremam fudere parenti:
Hanc tibi, summe parens, animam commendo, nec ultra
Prosiliit, vitamque simul cum voce reliquit.
Haud secùs extremo videas spiramine lychnum
Ingentem nisu valido producere lucem,
Et sursùm elatas, iterum subsidere flammas,
Donec anhelanti similem circumfluus humor
Deserit, & densæ subeunt fuliginis undæ.

Debilis intereà viſa eſt ſcintilla per umbras
Semianimes atris miſcere vaporibus ignes,
Deficiunt tandem & vano conamine ſursùm
Evecti, æternis noctis conduntur in umbris.
Nec tamen æternæ claudent tua lumina noctes,
Nate Deo, veram referet lux tertia lucem,
Et majora dabit renovato lumina mundo.
Quò me, quò, Balzace, rapis? juvat ire per altum
Exemplo quocùnque tuo me muſa vocarit,
Exiguo ſine te vix ſuffectura labori;
Scilicet optati venient tanto Auſpice verſus,
Et quo Pierij frueris ſuper ardua montis
Editus, hoc olim forſan potietur honore
Balzaco proles non inficianda parenti.

FIGVRÆ À PAGINA 144. AD PAG. 167.

